1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

В результате изучения данной темы студент должен научиться:

– вычислять определители (по правилу Саррюса; разлагая определитель по элементам какой-либо строки (столбца));

– выполнять операции над матрицами (сложение, вычитание, умножение на число, транспонирование, произведение матриц);

– находить матрицу, обратную данной;

– решать матричные уравнения;

– находить ранг матрицы;

– проверять совместность систем линейных алгебраических уравнений;

– решать системы линейных уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера;

– находить собственные значения и собственные векторы матрицы;

– приводить квадратичную форму к каноническому виду.

1.1. ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ -15 & 10 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите: 1) $A+B$; 2) $2B-5A$; 3) $3A^T+2B^T$.

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Найдите: 1) $|A|, |B|$; 2) $A^{-1}+AB^T$.

3. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Найдите те из произведений AB, BA, AC, CA, BC, CB, которые имеют смысл.

4. Решите матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $X \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$, если:

1) $f(x)=x^2+2x-1,\ A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

2) $f(x)=3x^2-5x+2,\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Найдите ранг матрицы A методом элементарных преобразований, если:

1) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&1&1\\1&3&4&1\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1&2&4&-3\\3&5&6&-4\\3&8&2&-19\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}3&-1&3&2&5\\5&-3&2&3&4\\1&-3&-5&0&-7\\7&-5&1&4&1\end{pmatrix}$.

7. Исследуйте системы уравнений на совместность и, в случае совместности, решите их: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса.

1) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=3,\\3x_1+x_2+2x_3=7,\\2x_1+3x_2+x_3=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x_1+4x_2-3x_3=2,\\x_1+5x_2-x_3=3,\\3x_1-x_2-3x_3=-7;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}4x_1-3x_2+x_3=3,\\x_1+x_2-x_3=4,\\3x_1-4x_2+2x_3=2.\end{cases}$

8. Решите системы уравнений методом Гаусса:

1) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3,\\2x_1+2x_2+2x_3=6;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x_1+5x_2-8x_3=8,\\4x_1+3x_2-9x_3=9,\\2x_1+3x_2-5x_3=7,\\x_1+8x_2-7x_3=12.\end{cases}$

9. Найдите общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=0,\\3x_1+2x_2-3x_3=0,\\5x_1+x_2-x_3=0.\end{cases}$$

10. Найдите собственные значения и собственные векторы матриц:

1) $A=\begin{pmatrix}5&6\\6&0\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\4&0&1\\3&-1&1\end{pmatrix}$.

11. Запишите матрицы квадратичных форм:

1) $Q(x_1,x_2)=2x_1^2+3x_2^2-5x_1x_2$;

2) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+12x_2x_3+7x_3^2$.

12. Приведите данные квадратичные формы к каноническому виду с помощью метода Лагранжа (выделение полных квадратов):

1) $Q(x_1,x_2)=4x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$;

2) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$.

Ответы

1. 1) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -21 & 14 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & -48 \\ 16 & 32 \\ 32 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 1) $|A| = -10,\ |B| = 38$; 2) $\begin{pmatrix} 7 & -0{,}2 & 19{,}4 \\ 24{,}5 & 1{,}9 & 64{,}2 \\ 1 & -3{,}6 & 7{,}2 \end{pmatrix}$.

3. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$.

4. 1) $X = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. 1) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 6 & 1 & -13 \\ -20 & 1 & 27 \end{pmatrix}$.

6. 1) $\operatorname{rang} A = 2$; 2) $\operatorname{rang} A = 3$; 3) $\operatorname{rang} A = 3$.

7. 1) $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$; 2) $x_1 = -4,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2$; 3) система несовместна.

8. 1) $(3 - c_1 - c_2;\ c_1;\ c_2)$, где c_1, c_2 – произвольные действительные числа; 2) $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$.

9. Общее решение: $x_1 = -c,\ x_2 = 12c,\ x_3 = 7c$, где c – произвольное действительное число, ФСР: $(-1; 12; 7)^{\mathrm{T}}$.

10. 1) СЗ: $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 9$, СВ: $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

2) СЗ: $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$, СВ: $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$.

11. 1) $\begin{pmatrix} 2 & -2{,}5 \\ -2{,}5 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

12. 1) $Q(y_1, y_2) = 4y_1^2 + 4y_2^2$, где $y_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2$, $y_2 = x_2$;

2) $Q(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 - \frac{3}{4}y_2^2 - \frac{2}{3}y_3^2$, где $y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2$, $y_2 = x_2 - \frac{2}{3}x_3$, $y_3 = x_3$.

1.2. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите:

1) $3A-2B$; 2) $A^{\mathrm{T}}+B^2+2E$; 3) $AB+BA$; 4) $|A|$; 5) A^{-1}.

Решение:

1) найдем матрицы $3A$ и $2B$, умножая каждый элемент матрицы A на 3 и каждый элемент матрицы B на 2:

$$3A=\begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix},\ 2B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 14 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим разность $3A-2B$, вычитая из каждого элемента матрицы $3A$ соответствующий элемент матрицы $2B$:

$$3A-2B=\begin{pmatrix} 9-0 & 3-(-2) & 6-4 \\ -3-4 & 0-2 & 6-2 \\ 3-6 & 6-14 & 3-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ -7 & -2 & 4 \\ -3 & -8 & 1 \end{pmatrix};$$

2) найдем транспонированную матрицу A^{T}, которая получается из матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером:

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}=C_{3\times 3}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$,

где

$c_{11}=0\cdot 0+(-1)\cdot 2+2\cdot 3=4,$ $c_{21}=2\cdot 0+1\cdot 2+1\cdot 3=5,$ $c_{31}=3\cdot 0+7\cdot 2+1\cdot 3=17,$

$c_{12}=0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+2\cdot 7=13,$ $c_{22}=2\cdot(-1)+1\cdot 1+1\cdot 7=6,$ $c_{32}=3\cdot(-1)+7\cdot 1+1\cdot 7=11,$

$c_{13}=0\cdot 2+(-1)\cdot 1+2\cdot 1=1,$ $c_{23}=2\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 1=6,$ $c_{33}=3\cdot 2+7\cdot 1+1\cdot 1=14.$

Получаем $B^2=\begin{pmatrix} 4 & 13 & 1 \\ 5 & 6 & 6 \\ 17 & 11 & 14 \end{pmatrix}$.

Находим

$$A^{\mathrm{T}}+B^2-2E=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 13 & 1\\ 5 & 6 & 6\\ 17 & 11 & 14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3+4-2 & -1+13-0 & 1+1-0\\ 1+5-0 & 0+6-2 & 2+6-0\\ 2+17-0 & 2+11-0 & 1+14-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 12 & 2\\ 6 & 4 & 8\\ 19 & 13 & 13\end{pmatrix};$$

3) вычислим

$$AB=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 0+1\cdot 2+2\cdot 3 & 3\cdot(-1)+1\cdot 1+2\cdot 7 & 3\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 1\\ -1\cdot 0+0\cdot 2+2\cdot 3 & -1\cdot(-1)+0\cdot(-1)+2\cdot 7 & -1\cdot 2+0\cdot 1+2\cdot 1\\ 1\cdot 0+2\cdot 2+1\cdot 3 & 1\cdot(-1)+2\cdot 1+1\cdot 7 & 1\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 12 & 9\\ 6 & 15 & 0\\ 7 & 8 & 5\end{pmatrix}.$$

Найдем $BA=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot 3+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 1 & 0\cdot 1+(-1)\cdot 0+2\cdot 2 & 0\cdot 2+(-1)\cdot 2+2\cdot 1\\ 2\cdot 3+1\cdot(-1)+1\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 2 & 2\cdot 2+1\cdot 2+1\cdot 1\\ 3\cdot 3+7\cdot(-1)+1\cdot 1 & 3\cdot 1+7\cdot 0+1\cdot 2 & 3\cdot 2+7\cdot 2+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 6 & 4 & 7\\ 3 & 5 & 21\end{pmatrix}.$$

Тогда $AB+BA=\begin{pmatrix}8 & 12 & 9\\ 6 & 15 & 0\\ 7 & 8 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 6 & 4 & 7\\ 3 & 5 & 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 16 & 9\\ 12 & 19 & 7\\ 10 & 13 & 26\end{pmatrix};$

4) вычислим определитель матрицы A, разлагая его по элементам второй строки: $|A|=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$,
где a_{2j} – элемент второй строки матрицы A, $j=1,2,3$; A_{2j} – алгебраическое дополнение элемента a_{2j}, $j=1,2,3$.

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(1-4)=3,\qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3-2=1,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(6-1)=-5.$$

Получим $|A|=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-1)\cdot 3+0\cdot 1+2\cdot(-5)=-13;$

5) обратная матрица существует только для квадратной невырожденной матрицы (т. е. определитель которой отличен от нуля). Так как $|A| = -13 \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует. Найдем ее по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычислим алгебраические дополнения A_{1j} и A_{3j}, $j = 1, 2, 3$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, $A^{-1} = -\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -8 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ -\frac{3}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{8}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix}.$

2. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение

По определению $f(A) = 2A^2 - 3A + E$. Найдем

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(A) = 2 \cdot A^2 - 3 \cdot A + 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$

3. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ методом элементарных преобразований.

Решение

Обозначим I_1, I_2, I_3 строки матрицы *A*. Приведем матрицу *A* к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк, не изменяющих ранга матрицы *A*: $I_2 + (-2)\cdot I_1$, $I_3 - I_1$.

В результате получим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2I_1 \\ -I_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2I_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что связанные значком $\sim$ матрицы имеют одинаковые ранги.

Очевидно, все миноры третьего порядка полученной матрицы равны нулю, но существуют миноры второго порядка, не равные нулю, например $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$. Следовательно, ранг матрицы, полученной в результате элементарных преобразований из матрицы *A*, равен 2. Значит, $\operatorname{rang} A = 2$.

4. Исследуйте системы линейных уравнений на совместность и, в случае совместности, решите их: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

Решение:

1) совместность системы проверим по теореме Кронекера – Капелли. Определитель основной матрицы системы

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4-2) - (8-8) + 2\cdot(2+4) = 6 \neq 0,$$

значит, строки матрицы *A* линейно независимы и, следовательно, ранг матрицы *A* равен 3.

Так как ранг матрицы $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)$ меньше либо равен 3 (она имеет три строки) и, как мы показали, ее минор 3-го порядка $|A| \neq 0$, то

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 3$. Значит по теореме Кронекера – Капели исходная система совместна;

а) решим систему по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ – определитель основной матрицы системы; Δ_i – определитель, полученный из Δ заменой в нем i-го столбца столбцом свободных членов $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $i = 1,\ 2,\ 3$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -18, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6.$$

Отсюда получим решение системы уравнений:

$$x_1 = \frac{6}{6} = 1;\ x_2 = \frac{-18}{6} = -3;\ x_3 = \frac{-6}{6} = -1;$$

б) решим ту же систему уравнений методом Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками матрицы, что равносильно исключению неизвестной x_1 из второго и третьего уравнений и неизвестной x_2 из третьего уравнения. Для этого из второй строки вычтем первую, умноженную на 2; из третьей строки вычтем первую, умноженную на 4. Затем из третьей строки вычтем вторую:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2I_1 \\ -4I_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -3 & -4 & 13 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -I_2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Полученной матрице соответствует система $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ -2x_3 = 2, \end{cases}$ из которой последовательно находим $x_3 = -1,\ x_2 = -3,\ x_1 = 1$;

2) проверим совместность системы с помощью теоремы Кронекера – Капелли. В расширенной матрице $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right)$ осуществим следующие преобразования: из третьей строки вычтем сумму первых двух, из первой вычтем вторую, ко второй строке прибавим первую, умноженную на 3:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -3 & 1\\ 5 & -2 & -2 & 4\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ -(I_1+I_2)\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}-I_2\\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -4 & 4 & 1\\ 3 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ +3I_1\\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -4 & 4 & 1\\ 0 & -11 & 9 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Очевидно, что ранг основной матрицы равен 2, а расширенной – 3. Из того, что ранги основной и расширенной матриц не равны, заключаем по теореме Кронекера – Капелли, что система не имеет решений, т. е. несовместна.

5. Найдите общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3=0,\\ 2x_1-4x_2+x_3=0,\\ 3x_1-2x_2-4x_3=0.\end{cases}$$

Решение

Находим ранг основной матрицы системы с помощью элементарных преобразований строк.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -5 & 0\\ 2 & -4 & 1 & 0\\ 3 & -2 & -4 & 0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ -3I_1\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & 0\\ 2 & -4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ -2I_1\\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -5 & 0\\ 0 & -8 & 11 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Ранг r матрицы A равен 2, так как существует минор 2-го порядка, отличный от нуля (например $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -8\end{vmatrix}$). Поскольку ранг матрицы $(r=2)$ меньше числа неизвестных $(n=3)$, то система имеет бесконечно много решений. Найдем их, решая систему, соответствующую преобразованной матрице:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3=0,\\ -8x_2+11x_3=0.\end{cases}$$

Из второго уравнения выразим x_2 через x_3, а из первого – x_1 через x_3, с учетом найденного x_2 (в этом случае x_3 является свободной переменной, которая принимает любые действительные значения). Получим

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{11}{8}x_3, \\ x_1 = \dfrac{9}{4}x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из $n-r=3-2=1$ решения. Положив, например, $x_3=1$, находим $x_2=\dfrac{11}{8}$, $x_1=\dfrac{9}{4}$. Тогда фундаментальная система решений примет вид $\overline{x}_1=\begin{pmatrix} \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{11}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$. Общее решение системы имеет вид $\overline{x}=c\overline{x}_1$, или $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=c\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{11}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$, где c – произвольное действительное число.

6. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение

Собственные значения матрицы A найдем, решив характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=0$, которое в нашем случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(-(1-\lambda)(1+\lambda)-3)+2(-1-\lambda-1)+3(3-1+\lambda)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2-4)-2(2+\lambda)+3(2+\lambda)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2+\lambda)((2-\lambda)(\lambda-2)+1)=0 \Leftrightarrow -(\lambda+2)(\lambda^2-4\lambda+3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)=0 \Leftrightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=3.$$

Для каждого из трех собственных значений составим и решим однородную систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

решениями которой являются собственные векторы матрицы *A*.

Для $\lambda_1 = 1$ указанная система имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -I_1 \\ -I_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -\frac{5}{2}I_2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда $x_2 = x_3, x_1 = 2x_2 - 3x_3 = -x_3$. Полагая $x_3 = c_1 \neq 0$, получим собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = 1$:

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1,$$

где c_1 – произвольное число, отличное от нуля.

Для $\lambda_2 = -2$ имеем следующую систему:

$$\begin{pmatrix} 2-(-2) & -2 & 3 \\ 1 & 1-(-2) & 1 \\ 1 & 3 & -1-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда $x_3 = -14x_2, x_1 = 11x_2$. Полагая $x_2 = c_2 \neq 0$, получим собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = -2$:

$$\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 11c_2 \\ c_2 \\ -14c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix} c_2,$$

где c_2 – произвольное число, отличное от нуля.

Аналогично для $\lambda_3 = 3$ имеем

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -2 & 3 \\ 1 & 1-3 & 1 \\ 1 & 3 & -1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда $x_2 = x_3,\ x_1 = 3x_3 - 2x_2 = x_3$. Полагая $x_3 = c_3 \neq 0$, получим собственный вектор, соответствующий $\lambda_3 = 3$:

$$\overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_3,$$

где c_3 – произвольное число, отличное от нуля.

Таким образом, матрица A имеет три собственных значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$. Соответствующие им собственные векторы имеют вид

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1,\ \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix} c_2,\ \overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_3,$$

где $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7. Приведите к каноническому виду уравнение линии второго порядка $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 16$, используя теорию квадратичных форм.

Решение

Левая часть уравнения $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 16$ представляет собой квадратичную форму с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Составим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$ для матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 8, \lambda_2 = -2.$$

Находим собственные векторы из системы уравнений

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0, \end{cases}$$

полагая $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = -2$.

При $\lambda_1 = 8$ имеем

$$\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = c \neq 0.$$

Полагая $c = 1$, получим собственный вектор $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 8$.

При $\lambda_2 = -2$ имеем

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2.$$

Полагая $c = -1$, получим собственный вектор $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Нормируем собственные векторы $\overrightarrow{x_1}$ и $\overrightarrow{x_2}$ $\left(\overline{e_\imath} = \dfrac{\overrightarrow{x_i}}{\left|\overrightarrow{x_i}\right|} \right)$: $\quad \left|\overrightarrow{x_1}\right| = \left|\overrightarrow{x_2}\right| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \overline{e_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \overline{e_2} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Составляем матрицу перехода от старого базиса к новому

$$T = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

столбцами которой являются координаты нормированных собственных векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$.

Выполним в уравнении $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 16$ переход от координат x, y к новым координатам x', y' по формулам

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'). \end{cases}$$

В результате получаем из исходного уравнения кривой ее каноническое уравнение:

$$\frac{3}{2}(x'-y')^2+5\left(x'^2-y'^2\right)+\frac{3}{2}\left(x'^2+y'^2\right)=16 \Leftrightarrow\ 8x_1'^2-2y_1'^2=16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1'^2}{2}-\frac{y_1'^2}{8}=1.$$

Последнее уравнение есть каноническое уравнение гиперболы.

1.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Найдите $5A-3B+2C$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите AB и BA.

3. Найдите AA^T и $A^T A$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Найдите $AB,\ BC,\ B^T BC,\ AD,\ A^T AD$.

5. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найдите те из произведений AB, BA, AC, CA, BC, CB, которые имеют смысл.

6. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$, если:

1) $f(x)=x^2-3x+2$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $f(x)=2x^3-x^2+3$, $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Вычислите определитель одним из следующих методов: а) по правилу треугольников; б) разложением по первой строке; в) приведением к треугольному виду:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix}$.

8. Дана матрица A. Убедитесь, что она невырожденная, найдите обратную ей матрицу A^{-1} и проверьте равенства $AA^{-1}=A^{-1}A=E$:

1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

9. Решите матричные уравнения:

1) $X\begin{pmatrix}4 & 3\\ -5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

10. Найдите ранг матрицы *A* методом элементарных преобразований:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & 4\\ 2 & -6 & 4 & 3\\ 3 & -9 & 3 & 2\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}-8 & 1 & -7 & -5 & -5\\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2 & 0\\ 1 & 8 & 2 & 1\\ 2 & 7 & 1 & -4\end{pmatrix}$.

11. Исследуйте системы линейных уравнений на совместность и, в случае совместности, решите их: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса:

1) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=1,\\ 3x_1+2x_2-x_3=9,\\ x_1-4x_2+3x_3=-5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x_1+8x_2+x_3=2,\\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7,\\ 2x_1+x_2-x_3=-5;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=8,\\ 2x_1+5x_2-3x_3=11,\\ 5x_1+6x_2-2x_3=13.\end{cases}$

12. Решите системы линейных уравнений методом Гаусса:

1) $\begin{cases}x_1+4x_2-2x_3-3x_5=2,\\ 2x_1+9x_2-x_3-4x_4=5,\\ x_1+5x_2+x_3-4x_4+3x_5=4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-x_4=0,\\ x_1-x_2+x_3+2x_4=4,\\ x_1+5x_2+5x_3-4x_4=-4,\\ x_1+8x_2+7x_3-7x_4=-8;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=1,\\ 3x_1-x_2+x_3+4x_4+3x_5=4,\\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4+x_5=0.\end{cases}$

13. Найдите общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0,\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0,\\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0,\\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1-x_2+x_3-x_4=0,\\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=0,\\ 2x_1+4x_2+5x_3+10x_4=0,\\ 2x_1-4x_2+x_3-6x_4=0.\end{cases}$

14. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы:

1) $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Приведите к каноническому виду уравнения кривых второго порядка и постройте их графики в исходной системе координат.

1) $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$;

2) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$;

3) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

Ответы

1. $\begin{pmatrix} -20 & -7 & 8 \\ 28 & 19 & -6 \\ -5 & 18 & 27 \end{pmatrix}$.

2. $AB=BA=\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $AA^T=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & 14 & 12 \\ 4 & 12 & 16 \end{pmatrix}$, $A^TA=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \\ 7 & -3 & 26 \end{pmatrix}$.

4. $AB=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $BC=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B^TBC=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $AD=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^TAD=\begin{pmatrix} -7 \\ -17 \end{pmatrix}$.

5. $BA=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $AC=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

6. 1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 18 & -20 \\ 30 & -2 \end{pmatrix}$.

7. 1) 87; 2) 0; 3) 8.

8. 1) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

9. 1) $X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} \frac{15}{7} \\ -\frac{16}{7} \\ -\frac{11}{7} \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

10. 1) 2; 2) 2; 3) 3.

11. 1) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$; 2) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$;
3) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -5$.

12. 1) система несовместна; 2) $x_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}c_1 - c_2$, $x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}c_1 + c_2$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; 3) $x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}c_1 - \frac{3}{4}c_2 - c_3$, $x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}c_1 + \frac{7}{4}c_2$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

13. 1) ФСР: $\overline{x_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{x_2} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, общее решение: $\overline{x} = c_1\overline{x_1} + c_2\overline{x_2}$, где c_1, c_2 – произвольные действительные числа;

2) ФСР: $\overline{x_1} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, общее решение: $\overline{x} = c_1\overline{x_1} + c_2\overline{x_2}$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

14. 1) СЗ: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -1$, СВ: $\overrightarrow{x_1} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x_2} = b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x_3} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; 2) СЗ: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 8, \lambda_3 = -2$, СВ: $\overrightarrow{x_1} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\overrightarrow{x_2} = b\begin{pmatrix}125\\49\\21\end{pmatrix},\ \overrightarrow{x_3} = c\begin{pmatrix}-5\\-1\\1\end{pmatrix},\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

15. 1) эллипс $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} = 1$; 2) гипербола $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1$; 3) парабола $y'^2 = 4\sqrt{2}x'$.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

В результате изучения данной темы студент должен научиться:

– изображать линейные комбинации заданных плоских векторов;

– находить координаты линейной комбинации векторов, длину вектора;

– вычислять скалярное, векторное, смешанное произведения векторов и с их помощью находить угол между векторами, площади треугольника, параллелограмма, объемы параллелепипеда, пирамиды;

– проверять коллинеарность, ортогональность и компланарность векторов;

– составлять уравнения прямой на плоскости и в пространстве;

– определять взаимное расположение прямых;

– составлять уравнения плоскостей;

– определять взаимное расположение плоскостей, прямой и плоскости;

– приводить уравнения кривых и поверхностей 2-го порядка к каноническому виду и определять типы кривых и поверхностей по полученным уравнениям.

2.1. ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Изобразите на плоскости два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте векторы:

1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-3\vec{b}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; 4) $-2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

2. Среди изображенных на рис. 1 векторов укажите:
1) коллинеарные; 2) ортогональные;
3) противоположно направленные;
4) сонаправленные; 5) равные.

3. Найдите координаты, длину вектора $\overrightarrow{AB}$ и середину отрезка AB, если: 1) $A(1;-1)$, $B(-1;\ 2)$; 2) $A(3;-4;\ 1)$, $B(4;\ 6;-3)$.

4. Найдите координаты и длины векторов $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$ и $\vec{d}=3\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, если $\vec{a}=(3;-1;\ 2)$, $\vec{b}=(-2;\ 0;\ 2)$.

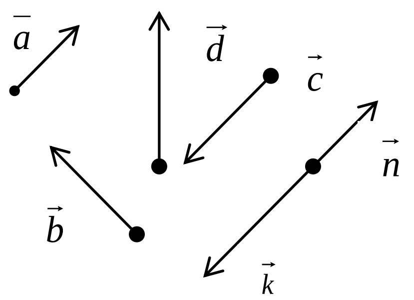

Рис. 1

5. Докажите, что векторы $\vec{a}=(3;-2;\ 1)$, $\vec{b}=(-1;\ 1;-2)$ и $\vec{c}=(2;\ 1;-3)$ образуют базис и найдите разложение вектора $\vec{d}=(11;-6;\ 5)$ по этому базису.

6. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$. Выполните следующие задания:

1) вычислите скалярное произведение векторов $2\vec{b}$ и $-\vec{c}$;

2) найдите модуль векторного произведения векторов $\vec{a}+\vec{c}$ и $\vec{b}$;

3) вычислите смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $-\vec{b}$ и $2\vec{c}$;

4) проверьте, будут ли векторы $\overrightarrow{3b}$ и $\vec{c}$ коллинеарными, ортогональными;

5) проверьте, будут ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{c}$ компланарными.

7. Прямая ℓ задана общим уравнением $5x+3y+15=0$. Запишите следующие уравнения данной кривой: 1) с угловым коэффициентом; 2) «в отрезках»; 3) каноническое; 4) параметрические. Постройте прямую ℓ.

8. Запишите уравнения прямых, которые проходят через точку $A(3;-1)$ и параллельны: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат; 3) биссектрисе первого координатного угла; 4) прямой $y=3x+9$.

9. Даны вершины треугольника *ABC*: $A(2;2)$, $B(-2;-8)$, $C(-6;-2)$. Найдите: 1) уравнение стороны *AB*; 2) уравнение высоты *CH*; 3) уравнение медианы *AM*; 4) расстояние от точки *C* до прямой *AB*; 5) уравнение прямой ℓ, проходящей через вершину *C* параллельно прямой *AB*; 6) косинус внутреннего угла при вершине *A*; 7) точку *N* пересечения высоты *CH* и медианы *AM*.

10. Запишите уравнение плоскости: 1) параллельной плоскости Oxz и проходящей через точку $M_0(7;-3;5)$; 2) проходящей через ось Oz и точку $A(-3;1;-2)$; 3) параллельной оси Ox и проходящей через две точки $M_1(4;0;-2)$ и $M_2(5;1;7)$; 4) проходящей через точку $B(2;1;-1)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=(1;-2;3)$; 5) проходящей через точку $C(3;4;-5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}=(3;1;-1)$ и $\vec{b}=(1;-2;1)$.

11. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1;-2;3)$ перпендикулярно плоскости $x-3y+5z-7=0$.

12. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(1;0;3)$, $B(-1;1;1)$, $C(1;2;1)$ и $D(0;3;2)$. Найдите: 1) уравнение прямой *AB*; 2) длину ребра *AB*; 3) угол φ между ребрами *AB* и *AC*; 4) уравнение плоскости *ABC*; 5) площадь $\triangle ABC$; 6) синус угла между ребром *AD* и гранью *ABC*; 7) объем пирамиды *ABCD*; 8) уравнения и длину высоты *DH*, опущенной из точки *D* на плоскость *ABC*; 9) уравнение плоскости, проходящей через точку *D*, параллельно плоскости *ABC*; 10) точку пересечения высоты *DH* и грани *ABC*.

Ответы

2. 1) $\vec{a}, \vec{c}, \vec{k}, \vec{n}$; 2) $\vec{a}\perp\vec{b}, \vec{c}\perp\vec{b}$, $\vec{b}\perp\vec{k}, \vec{b}\perp\vec{n}$; 3) $\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{c}$, $\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{k}$, $\vec{n}\downarrow\uparrow\vec{c}$, $\vec{n}\downarrow\uparrow\vec{k}$; 4) $\vec{c}\uparrow\uparrow\vec{k}$, $a\uparrow\uparrow\vec{n}$; 5) $\vec{a}=\vec{n}$.

3. 1) $\overrightarrow{AB}=(-2;3)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{13}$, $M\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$; 2) $\overrightarrow{AB}=(1;10;-4)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{117}$, $M\left(\dfrac{7}{2};1;-1\right)$.

4. $\vec{c}=(12;-2;-2)$, $|\vec{c}|=2\sqrt{38}$, $\vec{d}=(8;-3;\ 7)$, $|\vec{d}|=\sqrt{122}$.

5. $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$.

6. 1) -6; 2) $\sqrt{146}$; 3) -34; 4) не коллинеарны, не ортогональны; 5) не компланарны.

7. 1) $y=-\dfrac{5}{3}x-5$; 2) $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{-5}=1$; 3) $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y+5}{5}$; 4) $\begin{cases} x=-3t, \\ y=-5+5t, \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

8. 1) $y=-1$; 2) $x=3$; 3) $y=x-4$; 4) $y=3x-10$.

9. 1) $-5x+2y+6=0$; 2) $2x+5y+22=0$; 3) $7x-6y-2=0$; 4) $\dfrac{32}{\sqrt{29}}$; 5) $-5x+2y-26=0$; 6) $\dfrac{9}{\sqrt{145}}$; 7) $N\left(-\dfrac{122}{47};-\dfrac{158}{47}\right)$.

10. 1) $y+3=0$; 2) $x+3y=0$; 3) $9y-z-2=0$; 4) $x-2y+3z+3=0$; 5) $x+4y+7z+16=0$.

11. Канонические уравнения: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-3}{5}$, параметрические уравнения: $\begin{cases} x=t+1, \\ y=-3t-2, \quad t\in\mathbb{R}. \\ z=5t+3, \end{cases}$

12. 1) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$; 2) $AB=3$; 3) $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$; 4) $x-2y-2z+5=0$; 5) $S_{ABC}=3$; 6) $\sin\Theta=\dfrac{5}{3\sqrt{11}}$; 7) $V_{ABCD}=\dfrac{5}{3}$; 8) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{-2}$, $DH=\dfrac{5}{3}$; 9) $x-2y-2z+10=0$; 10) $\left(\dfrac{5}{9};\dfrac{17}{9};\dfrac{8}{9}\right)$.

2.2. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Даны векторы $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{d} = 5\vec{i} - 20\vec{j} + 15\vec{k}$. Требуется:

1) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{b}$ и $2\vec{a} - \vec{c}$;

2) вычислить векторное произведение векторов $\vec{c}$ и $\vec{a} - 3\vec{b}$;

3) выяснить, являются ли векторы $2\vec{a}$ и $-3\vec{b}$ коллинеарными, ортогональными;

4) показать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение:

1) найдем координаты вектора

$2\vec{a} - \vec{c} = 2\left(6\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right) - \left(\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}\right) = 11\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Так как скалярное произведение векторов $\vec{m} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{n} = (x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле $\vec{m} \cdot \vec{n} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$, то

$\vec{b} \cdot \left(2\vec{a} - \vec{c}\right) = 2 \cdot 11 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = 19$;

2) найдем координаты вектора

$\vec{a} - 3\vec{b} = \left(6\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right) - 3\left(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) = -5\vec{j} + 5\vec{k}$.

Так как векторное произведение векторов $\vec{m} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{n} = (x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле

$$\vec{m} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}, \text{ то}$$

$$\vec{c} \times \left(\vec{a} - 3\vec{b}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \vec{k} = -5\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k};$$

3) условием коллинеарности векторов $\vec{m} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{n} = (x_2; y_2; z_2)$ является пропорциональность их координат:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Найдем координаты векторов $2\vec{a}$ и $-3\vec{b}$:

$2\vec{a} = 12\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$; $-3\vec{b} = -6\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$.

Поскольку $\frac{12}{-6} \neq \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$, то векторы $2\vec{a}$ и $-3\vec{b}$ не коллинеарны.

Условием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

Так как $2\vec{a}\cdot\left(-3\vec{b}\right)=12\cdot(-6)+(-4)\cdot(-3)+4\cdot 3=-48\neq 0$, то векторы $2\vec{a}$ и $-3\vec{b}$ не ортогональны;

4) векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$, если они не компланарны, т. е. их смешанное произведение не равно нулю.

Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}6 & -2 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=10(2-3)=-10\neq 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не компланарны и образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Представим вектор $\vec{d}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, т. е. $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$, где $(\alpha;\beta;\gamma)$ – координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Запишем последнее равенство в координатной форме:

$$\alpha\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -20\\ 15\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}6\alpha+2\beta+\gamma=5,\\ -2\alpha+\beta-3\gamma=-20,\\ 2\alpha-\beta+2\gamma=15.\end{cases}$$

Решим полученную систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}6 & 2 & 1 & 5\\ -2 & 1 & -3 & -20\\ 2 & -1 & 2 & 15\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ +I_2\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}6 & 2 & 1 & 5\\ -2 & 1 & -3 & -20\\ 0 & 0 & -1 & -5\end{array}\right)\begin{matrix}+3I_2\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 5 & -8 & 55\\ -2 & 1 & -3 & -20\\ 0 & 0 & -1 & -5\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & -3 & -20\\ 0 & 5 & -8 & -55\\ 0 & 0 & -1 & -5\end{array}\right).$$

Преобразованной расширенной матрице системы соответствует следующая система линейных уравнений:

$$\begin{cases}-2\alpha+\beta-3\gamma=-20,\\ 5\beta-8\gamma=-55,\\ -\gamma=-5,\end{cases}$$

из которой находим $\gamma=5,\beta=-3,\alpha=1$.

Значит, $\vec{d}=\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}$.

2. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1;-3)$, $B(0;7)$, $C(-2;4)$. Найдите:

1) уравнение стороны AB;

2) уравнение высоты CH;

3) уравнение медианы AM;

4) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

5) уравнение прямой, проходящей через вершину C, параллельно стороне AB;

6) расстояние от точки C до прямой AB.

Решение:

1) уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Подставляя в последнее равенство координаты точек A и B, получим

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-(-3)}{7-(-3)}\Leftrightarrow\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{10}\Leftrightarrow 10(x-1)=-(y+3)\Leftrightarrow 10x+y-7=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow y=-10x+7$ – уравнение прямой AB с угловым коэффициентом;

2) из перпендикулярности прямых AB и CH следует, что их угловые коэффициенты связаны равенством $k_{AB}\cdot k_{CH}=-1$.

Угловой коэффициент прямой AB равен –10. Тогда угловой коэффициент прямой CH: $k_{CH}=-\dfrac{1}{k_{AB}}=-\dfrac{1}{-10}=\dfrac{1}{10}$.

Используем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$ с известным угловым коэффициентом k: $y-y_0=k(x-x_0)$.

Подставляя в последнюю формулу координаты точки C и найденный коэффициент k_{CH}, получим

$$y-4=\frac{1}{10}(x-(-2))\Leftrightarrow x-10y+42=0$$ – общее уравнение высоты CH;

3) найдем координаты точки M – середины стороны AB по формулам:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2},$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-3+7}{2}=2.$$

Тогда по двум известным точкам $A(1;-3)$ и $M\left(\frac{1}{2};2\right)$ составляем уравнение медианы AM:

$$\frac{x-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{y-(-3)}{2-(-3)} \Leftrightarrow -2(x-1)=\frac{1}{5}(y+3) \Leftrightarrow 10x+y-7=0;$$

4) для нахождения координаты точки N пересечения медианы AM и высоты CH составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} x-10y+42=0, \\ 10x+y-7=0. \end{cases}$$

Решая ее, находим точку $N\left(\frac{28}{101}; \frac{427}{101}\right)$;

5) так как прямая, проходящая через вершину C, параллельна стороне AB, то угловой коэффициент искомой прямой равен $k_{AB}=-10$. По заданной точке $C(-2;4)$ и угловому коэффициенту $k_{AB}=-10$ составляем уравнение искомой прямой:

$$y-4=-10(x-(-2)) \Leftrightarrow 10x+y+16=0;$$

6) расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $ax+by+c=0$ вычисляется по формуле

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Подставляя в последнее равенство координаты точки $C(-2;4)$ и коэффициенты прямой AB: $10x+y-7=0$ $(a=10, b=1, c=-7)$, получим

$$d=\frac{|10\cdot(-2)+1\cdot 4-7|}{\sqrt{10^2+1^2}}=\frac{23}{\sqrt{101}}.$$

3. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A_1(2;1;7)$, $A_2(3;3;6)$, $A_3(2;-3;9)$, $A_4(1;2;5)$. Найдите:

1) уравнение прямой A_1A_2;

2) длину ребра A_1A_2;

3) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

4) уравнения и длину высоты A_4H, опущенной из вершины A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$;

5) площадь треугольника $A_1A_2A_3$;

6) угол φ между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

7) синус угла Θ между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

Решение:

1) уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$ и $A_2(x_2;y_2;z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Подставляя в последнее равенство координаты точек A_1 и A_2, получаем $\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-7}{6-7} \Leftrightarrow \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-7}{-1}$ – канонические уравнения прямой A_1A_2;

2) длина ребра A_1A_2 равна длине вектора $\overrightarrow{A_1A_2}=(3-2;3-1;6-7)=(1;2;-1)$, $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$;

3) уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ и $A_3(x_3;y_3;z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Подставляя в левую часть последнего равенства координаты точек A_1, A_2, A_3, получаем

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-7 \\ 3-2 & 3-1 & 6-7 \\ 2-2 & -3-1 & 9-7 \end{vmatrix}=(x-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}+(z-7)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=$$

$=(x-2)\cdot 0-(y-1)\cdot 2+(z-7)\cdot(-4)=-2y-4z+30$, откуда

$$-2(y+2z-15)=0 \Leftrightarrow y+2z-15=0.$$

Таким образом, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид $y+2z-15=0$;

4) чтобы составить уравнение прямой A_4H, воспользуемся каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

где $(x_0;y_0;z_0)$ – координаты произвольной точки прямой; $(m;n;p)$ – координаты направляющего вектора прямой.

Так как прямая A_4H перпендикулярна плоскости $A_1A_2A_3$, то в качестве направляющего вектора этой прямой можно взять вектор нормали $\vec{n}=(0;1;2)$ плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда канонические уравнения прямой A_4H имеют вид:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{2}.$$

Длина высоты A_4H равна расстоянию от точки $A_4(1;2;5)$ до плоскости $A_1A_2A_3$: $y+2z-15=0$. Вычислим A_4H, используя формулу расстояния от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Таким образом, $A_4H = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 - 15|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$;

5) площадь треугольника $A_1A_2A_3$ найдем, используя геометрический смысл векторного произведения:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right|.$$

Найдем координаты векторного произведения

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} - 4\vec{k}.$$

Тогда $S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{5}$;

6) косинус угла между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 найдем по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|},$$

где $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}$ – скалярное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$.

Известны координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2} = (1; 2; -1)$ и его длина $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{6}$. Найдем координаты и длину вектора $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (1 - 2; 2 - 1; 5 - 7) = (-1; 1; -2), \ \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$$

Тогда $\cos\varphi = \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, т. е. $\varphi = \frac{\pi}{3}$;

7) синус угла между прямой с направляющим вектором $\vec{a} = (m; n; p)$ и плоскостью, имеющей вектор нормали $\vec{n} = (A; B; C)$, вычисляется по формуле

$$\sin\Theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|m \cdot A + q \cdot B + p \cdot C|}{\sqrt{m^2 + q^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Направляющим для прямой A_1A_4 является вектор $\overrightarrow{A_1A_4} = (-1; 1; -2)$. Вектор нормали $\vec{n}$ к плоскости $A_1A_2A_3$ имеет координаты $(0; 1; 2)$.

Таким образом, $\sin\Theta = \frac{|-1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{30}}$.

4. Составьте уравнение линии, каждая точка которой находится в два раза ближе к точке $A(1;0)$, чем к точке $B(-2;0)$. Приведите полученное уравнение к каноническому виду и укажите тип линии, описываемой этим уравнением.

Решение

Обозначим произвольную точку искомой линии $M(x;y)$. Тогда по условию $2|MA|=|MB|$, где $|MA|$ и $|MB|$ – расстояния от точки M до точек A и B соответственно. Так как расстояние d между точками $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ вычисляется по формуле

$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, то

$|MA|=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}$, $|MB|=\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}$ и, следовательно,

$2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2} \Leftrightarrow 4\left((x-1)^2+y^2\right)=(x+2)^2+y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4x+y^2=0.$

Выделим полный квадрат по переменной x в последнем равенстве:

$x^2-4x+4+y^2=4$ или $(x-2)^2+y^2=4$.

Полученное уравнение определяет окружность с центром в точке (2; 0) и радиусом 2.

2.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Даны три точки $A(1;0;-2), B(2;-1;0), C(0;1;2)$. Найдите координаты и длину вектора $\vec{a}=\overline{AB}-\overline{AC}+2\overline{BC}$.

2. Найдите координаты и длину вектора $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}=(0;-2;-3)$, $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.

3. Выясните, являются ли векторы $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}$ ортогональными, коллинеарными.

4. При каких значениях α и β векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\alpha\vec{k}$ и $\vec{b}=\beta\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ коллинеарны?

5. Докажите, что векторы $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}$ и $\vec{c}=4\vec{i}-2\vec{j}$ линейно зависимы.

6. Докажите, что векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ образуют базис. Найдите координаты вектора $\vec{d}=-13\vec{i}+2\vec{j}+18\vec{k}$ в этом базисе.

7. Даны векторы $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=(2;1;2)$. Найдите:

1) скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$;

2) косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$;

4) $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$;

5) длину вектора $\vec{b}$.

8. Найдите координаты вектора $\vec{a}\times\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$, если $\vec{a}=(3;-1;-2)$, $\vec{b}=(1;2;-1)$.

9. Даны вершины треугольника $A(2;3;-1)$, $B(4;1;-2)$ и $C(1;0;2)$. Найдите: 1) внутренний угол при вершине C; 2) $\text{пр}_{\overrightarrow{CA}}\overrightarrow{CB}$; 3) площадь треугольника ABC.

10. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(8;4;1)$ и $\vec{b}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ как на сторонах.

11. Даны вершины пирамиды $A(2;0;4)$, $B(0;3;7)$, $C(0;0;6)$, $S(4;3;5)$. Вычислите ее объем V и длину высоты H, опущенной на грань ACS.

12. Лежат ли точки $A(1;2;-1)$, $B(4;1;5)$, $C(-1;2;1)$ и $D(6;1;3)$ в одной плоскости?

13. Компланарны ли следующие векторы:

1) $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(1;-1;3)$, $\vec{c}=(-1;9;-11)$;

2) $\vec{a}=(3;-2;1)$, $\vec{b}=(2;1;2)$, $\vec{c}=(3;-1;-2)$?

14. Выясните, правой или левой будет тройка векторов $\vec{a}=(3;4;0)$, $\vec{b}=(0;-4;1)$, $\vec{c}=(0;2;5)$.

15. По данным уравнениям постройте прямые, найдите их угловые коэффициенты и отрезки, отсекаемые ими на осях координат. Запишите канонические и параметрические уравнения этих прямых.

1) $2x-y+3=0$;

2) $5x+2y-8=0$;

3) $3x+8y+16=0$.

16. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(0;2)$ и $B(-3;7)$.

17. Точка $A(-2;3)$ лежит на прямой, перпендикулярной прямой $2x-3y+8=0$. Напишите уравнение этой прямой.

18. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-3)$ параллельно прямой, соединяющей точки $M_1(-4;0)$ и $M_2(2;2)$.

19. Исследуйте взаимное расположение следующих пар прямых:

1) $3x+5y-9=0$ и $10x-6y+4=0$;

2) $2x+5y-2=0$ и $x+y+4=0$;

3) $x+8=0$ и $2x-3=0$;

4) $2y=x-1$ и $4y-2x+2=0$.

В случае пересечения найдите координаты точки пересечения.

20. При каких значениях α следующие пары прямых: а) параллельны; б) перпендикулярны

1) $\alpha x-3y-3=0$ и $3x-6y+7=0$; 2) $2x-5y+9=0$ и $\alpha x+15y-1=0$?

21. Найдите координаты точки M_2, симметричной точке $M_1(-3;4)$ относительно прямой $4x - y - 1 = 0$.

22. Найдите расстояние между параллельными прямыми $2x - 3y + 8 = 0$ и $4x - 6y + 10 = 0$.

23. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $2x + 5y + 10 = 0$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник, площадь которого равна 5.

24. Найдите угол между прямыми $x + 2y - 5 = 0$ и $4x + 2y - 1 = 0$.

25. Найдите координаты центра O и радиус r окружности

$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$.

26. Приведите к каноническому виду уравнения кривых второго порядка. Определите тип этих кривых и постройте их.

1) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$; 2) $x^2 - 9y^2 + 2x - 36y - 44 = 0$;

3) $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$.

27. Определите, какая линия определяется уравнением

$x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8 + 2y - y^2}$.

28. Составьте уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $A(1;2;0)$, $B(2;1;1)$, $C(3;0;1)$.

29. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;1;-1)$, параллельно векторам $\vec{a} = (3;-1;0)$ и $b = (2;0;-1)$.

30. Составьте уравнение плоскости, проходящей:

1) через точку $M(4;-1;2)$ и ось Ox;

2) через точку $M(1;0;3)$ и ось Oy.

31. Найдите длину h высоты пирамиды $DABC$, опущенной из точки D на грань ABC, если $D(2;2;-\sqrt{3})$, $A(0;0;0)$, $B(0;1;1)$, $C(1;1;0)$.

32. Даны две плоскости $P_1: -x + 2y - z + 1 = 0$ и $P_2: y + 3z - 1 = 0$. Найдите косинус острого угла между ними.

33. Определите, при каких значениях ℓ и $\mp$ плоскости $P_1: 2x + ly + 3z - 5 = 0$ и $P_2: mx - 6y - 6z + 2 = 0$ параллельны.

34. Определите, при каком значении ℓ плоскости $P_1: 3x - 5y + lz - 3 = 0$ и $P_2: x + 3y + 2z + 5 = 0$ перпендикулярны.

35. Вычислите объем пирамиды, ограниченной плоскостью $P: 2x + 3y - 5z - 30 = 0$ и координатными плоскостями.

36. Составьте уравнения плоскостей, параллельных плоскости $P: x + 2y - 2z - 3 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d = 5$.

37. Напишите канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1;2;3)$ и $M_2(2;4;7)$.

38. Установите взаимное расположение прямой и плоскости (в случае их пересечения, найдите координаты точки пересечения):

1) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$ и $3x-3y+2z-5=0$;

2) $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ и $x+2y-4z+1=0$;

3) $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ и $3x-y+2z-5=0$.

39. Даны точка $A(3;-1;1)$ и плоскость $x+2y+2z+6=0$. Найдите координаты точки A^*, симметричной точке A относительно этой плоскости.

40. Найдите угол между прямыми $l_1:\begin{cases} x=3t-2, \\ y=0, \\ z=-t+3 \end{cases}$ и $l_2:\begin{cases} x=2t-1, \\ y=0, \\ z=t-3. \end{cases}$

41. Найдите координаты точки A^*, симметричной точке $A(2;3;-1)$ относительно прямой $l:\begin{cases} x=t+1, \\ y=-t-2, \quad t\in\mathbb{R}. \\ z=2t+1, \end{cases}$

42. Найдите угол между прямой $\frac{x-3}{1}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+7}{-2}$ и плоскостью $4x-2y-2z-3=0$.

43. Докажите, что прямые $l_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1}$ и $l_2:\frac{x+4}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{4}$ скрещиваются.

44. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(6;6;2)$, $A_2(5;4;7)$, $A_3(2;4;7)$, $A_4(7;3;0)$. Найдите: 1) длину ребра A_1A_2; 2) уравнение прямой A_1A_2; 3) угол φ между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 4) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 5) угол θ между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 6) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 7) площадь грани $A_1A_2A_3$; 8) объем пирамиды.

45. Приведите к каноническому виду уравнения поверхностей второго порядка, определите их тип:

1) $4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0$;

2) $x^2-y^2-4x+8y-2z=0$;

3) $4x^2-y^2+4z^2-8x+4y+8z+4=0$.

Ответы

1. $\vec{a} = (-2;2;2)$, $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$.

2. $\vec{c} = (6;-2;-3)$, $|\vec{c}| = 7$.

3. Не коллинеарны, не ортогональны.

4. $\alpha = -1, \beta = 4$.

6. $\vec{d} = 2\vec{a} + 5\vec{b}; \vec{c} = (2;5;0)$.

7. 1) 3; 2) $\frac{1}{\sqrt{21}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{21}}$; 4) 1; 5) 3.

8. (5; 1; 7).

9. 1) $\arccos\frac{18}{\sqrt{494}}$; 2) $\frac{18}{\sqrt{19}}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{170}$.

10. $18\sqrt{2}$.

11. $V = 2$, $H = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

12. Да.

13. 1) да; 2) нет.

14. Левая тройка.

16. $5x + 3y - 6 = 0$.

17. $3x + 2y = 0$.

18. $x - 3y - 11 = 0$.

19. 1) перпендикулярны; 2) пересекаются в точке $\left(-\frac{2}{3};-\frac{10}{3}\right)$; 3) параллельны; 4) совпадают.

20. 1) а) $\frac{3}{2}$; б) 1; 2) а) – 6; б) $\frac{75}{2}$.

21. $M_2(5;2)$.

22. $\sqrt{13}$.

23. $2x + 5y - 10 = 0$.

24. $\arccos\frac{4}{5}$.

25. $O\left(2;-\frac{5}{4}\right)$; $r = \frac{11}{4}$.

26. 1) эллипс $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$, где $x' = x - 1, y' = y - 2$; 2) гипербола $\frac{x'^2}{9} - y'^2 = 1$, где $x' = x + 1, y' = y - 2$;

3) парабола $x'^2=-y'$, где $x'=x-1, y'=y-\frac{5}{2}$.

27. Правая половина эллипса с центром $M(-5;1)$ и полуосями $a=2$, $b=3$.

28. $x+y-3=0$.

29. $x+3y-2z-7=0$.

30. 1) $2y+z=0$; 2) $-3x+z=0$.

31. $h=1$.

32. $\frac{1}{2\sqrt{15}}$.

33. $l=3, m=-4$.

34. $l=6$.

35. 150.

36. $x+2y-2z-18=0$, $x+2y-2z+12=0$.

37. Канонические уравнения: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{4}$; параметрические уравнения: $\begin{cases} x= t+1, \\ y=2t+2, \quad t\in\mathbb{R}. \\ z=4t+3, \end{cases}$

38. 1) параллельны; 2) прямая принадлежит плоскости; 3) пересекаются в точке $(2;3;1)$.

39. $A^*(1;-5;-3)$.

40. 45°.

41. $A^*\left(-\frac{8}{3};-\frac{13}{3};-\frac{7}{3}\right)$.

42. $\frac{\pi}{6}$.

44. 1) $\sqrt{30}$; 2) $\frac{x-6}{-1}=\frac{y-6}{-2}=\frac{z-2}{5}$; 3) $\varphi=\pi-\arccos\frac{\sqrt{105}}{42}$; 4) $5y+2z-34=0$; 5) $\theta=\arcsin\frac{19}{\sqrt{406}}$; 6) $\frac{x-7}{0}=\frac{y-3}{5}=\frac{z}{2}$; 7) $\frac{3\sqrt{29}}{2}$; 8) $\frac{19}{2}$.

45. 1) эллипсоид $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}+z'^2=1$, где $x'=x-1,\ y'=y-1,\ z'=z-1$; 2) гиперболический параболоид $x'^2-y'^2=2z'$, где $x'=x-2, y'=y-4$, $z'=z-6$; 3) конус $x'^2-\frac{y'^2}{4}+z'^2=0$, где $x'=x-1, y'=y-2, z'=z+1$.