Векторная алгебра

Пример 1. По заданным векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ построить вектор $2\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}$.

Δ Решение задачи приведено на рис. 4.

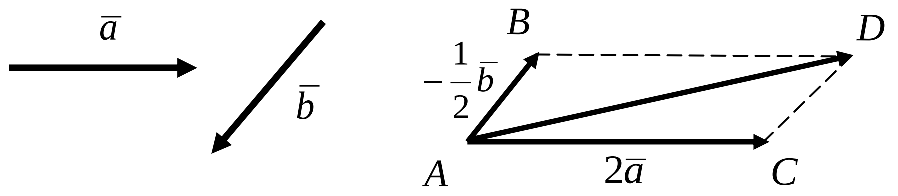

Рис. 4

$\overline{AD}=2\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}$. ▲

Пример 2. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\left|\overline{a}-\overline{b}\right|$.

Δ Построим на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ как на сторонах параллелограмм. Тогда $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|$ и $\left|\overline{a}-\overline{b}\right|$ – это длины его диагоналей. Из множества параллелограммов свойством равенства длин диагоналей обладают только прямоугольники. Таким образом, угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен $90°$. ▲

Пример 3. Найти координаты и длину вектора $3\overline{a}+2\overline{b}$, если $\overline{a}=(0;-2;-3)$, $\overline{b}=(3;2;3)$.

Δ Согласно свойству линейности $3\overline{a}+2\overline{b}=(0;-6;-9)+(6;4;6)=$ $=(6;-2;-3)$. Поэтому $\left|2\overline{a}+3\overline{b}\right|=\sqrt{36+4+9}=7$. ▲

Пример 4. Заданы три вершины $A(0;1;-1)$, $B(1;0;2)$, $C(2;3;0)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты точки D.

Δ Пусть $D(x;y;z)$. Поскольку $\overline{BC}=(1;3;-2)$, $\overline{AD}=(x;y-1;z+1)$, а векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ равны, то $1=x,\ 3=y-1,\ -2=z+1$. Отсюда $x=1,\ y=4,$ $z=-3$, т. е. $D(1;4;-3)$. ▲

Пример 5. Даны проекции отрезка $\overline{M_1M_2}$ на оси координат $X=5,\ Y=-4$, зная, что его начало в точке $M_1(-2;3)$, найти координаты его конца.

Δ Если известны координаты точек $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, то проекции X и Y на оси координат направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ могут быть определены по формулам $X=x_2-x_1, Y=y_2-y_1$. Таким образом, $x_2=X+x_1=3$, $y_2=Y+y_1=-1;\ M_2(3;-1)$. ▲

Пример 6. Точки $A(1;1), B(0;-3),\ C(2;2)$ – вершины треугольника.

Найти длину медианы AK и координаты точки M пересечения медиан $\Delta\, ABC$ (рис. 5).

Δ $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC} = (-1; -4) + (1; 1) = (0; -3)$; $\overline{AK} = \dfrac{1}{2}\overline{AD} = \left(0; -\dfrac{3}{2}\right)$;

$AK = \sqrt{0 + \dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$; $\overline{AM} = \dfrac{2}{3}\overline{AK} = (0; -1)$.

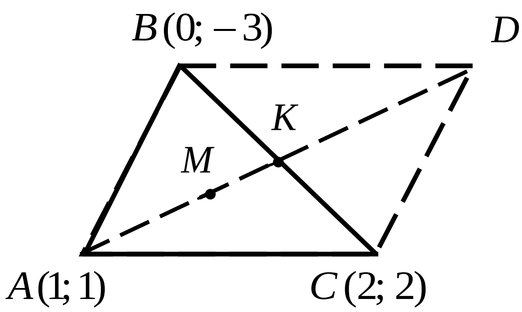

Рис. 5

Пусть $O(0; 0)$. Тогда $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = (1; 1) + (0; -1) = (1; 0)$, т. е. $M(1; 0)$. ▲

Пример 7. Найти вектор $\bar{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\bar{a} = 7\bar{i} - 4\bar{j} - 4\bar{k}$ и $\bar{b} = -2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, если $|\bar{x}| = 5\sqrt{6}$.

Δ Найдем орты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$\bar{a}_0 = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \dfrac{7\bar{i} - 4\bar{j} - 4\bar{k}}{\sqrt{81}} = \dfrac{1}{9}\left(7\bar{i} - 4\bar{j} - 4\bar{k}\right)$;

$\bar{b}_0 = \dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \dfrac{-2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}\left(-2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}\right)$. На векторах $\bar{a}_0$ и $\bar{b}_0$ как на сторонах построим ромб. Тогда его диагональ будет направлена по биссектрисе угла между векторами $\bar{a}_0$ и $\bar{b}_0$, т. е. $\bar{x} = \lambda\,(\bar{a}_0 + \bar{b}_0) = \lambda\left(\dfrac{1}{9}\bar{i} - \dfrac{7}{9}\bar{j} + \dfrac{2}{9}\bar{k}\right)$, $\lambda > 0$. Так как $|\bar{x}| = 5\sqrt{6}$, то $\dfrac{\lambda}{9}\sqrt{1 + 49 + 4} = 5\sqrt{6}$, $\lambda = 15$. Таким образом, $\bar{x} = \dfrac{5}{3}\left(\bar{i} - 7\bar{j} + 2\bar{k}\right)$. ▲

Пример 8. Найти значение параметра t, при котором вектор $\bar{a} = -\bar{i} + t\,\bar{j} + 4\bar{k}$ имеет длину, равную 5, и образует с вектором $\bar{j}$ тупой угол.

Δ Очевидно, $t < 0$. Так как $|\bar{a}| = \sqrt{1 + t^2 + 16} = 5$, то $t = -2\sqrt{2}$. ▲

Пример 9. К вершине куба приложены три силы, равные по величине соответственно $1, 2, 3$ и направленные по диагоналям граней куба, выходящих из одной вершины. Найти величину равнодействующей этих трех сил.

Δ Так как $\bar{F}_1 = \lambda_1\,(\bar{i} + \bar{j})$, $\bar{F}_2 = \lambda_2\,(\bar{i} + \bar{k})$, $\bar{F}_3 = \lambda_3\,(\bar{j} + \bar{k})$ и $|\bar{F}_1| = \lambda_1\sqrt{2} = 1$, $|\bar{F}_2| = \lambda_2\sqrt{2} = 2$, $|\bar{F}_3| = \lambda_3\sqrt{2} = 3$, то $\bar{F}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{i} + \bar{j})$, $\bar{F}_2 = \dfrac{2}{\sqrt{2}}(\bar{i} + \bar{k})$, $\bar{F}_3 = \dfrac{3}{\sqrt{2}}(\bar{i} + \bar{k})$.

Таким образом, $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\bar{i} + \dfrac{4}{\sqrt{2}}\bar{j} + \dfrac{5}{\sqrt{2}}\bar{k}$, $|\bar{F}| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5$. ▲

Пример 10. Доказать, что векторы $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} - 3\bar{j}$ и $\bar{c} = 4\bar{i} - 2\bar{j}$ линейно зависимы.

Δ Как известно, любые три вектора плоскости линейно зависимы. Покажем, например, что $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \begin{cases} \alpha + \beta = 4, \\ 2\alpha - 3\beta = -2, \end{cases} \quad \alpha = 2, \ \beta = 2,$$

т. е. векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ являются линейно зависимыми. ▲

Пример 11. Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$, $\bar{b} = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$, где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ – базис. Показать, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\bar{c} = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$ в базисе $\bar{a}$, $\bar{b}$.

Δ Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не являются коллинеарными, т. к. $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{3}$. Поэтому они тоже образуют базис. Любой вектор можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов. Для нахождения координат вектора $\bar{c}$ в этом базисе составляем и решаем систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3, \\ -\alpha + 3\beta = -2, \end{cases} \quad \alpha = \frac{11}{7}, \ \beta = -\frac{1}{7}.$$

Таким образом, в базисе $\bar{a}$, $\bar{b}$ координаты вектора $\bar{c} = \left(\frac{11}{7}; -\frac{1}{7}\right)$. ▲

Пример 12. Задана тройка векторов $\bar{e}_1 = (1; 0; 0), \bar{e}_2 = (1; 1; 0), \bar{e}_3 = (1; 1; 1)$. Доказать, что эта тройка векторов образует базис в V_3. Вычислить координаты вектора $\bar{a} = (7; 3; 1)$ в этом базисе.

Δ Составим линейную комбинацию векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ и приравняем ее к нулевому вектору:

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \beta + \gamma = 0, \\ \gamma = 0, \end{cases} \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Указанная тройка векторов образует базис. Найдем координаты вектора $\bar{a}$ в этом базисе:

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 7, \\ \beta + \gamma = 3, \\ \gamma = 1, \end{cases} \quad \alpha = 4, \ \beta = 2, \gamma = 1,$$

т. е. в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ вектор $\bar{a} = (4; 2; 1)$. ▲

Пример 13. Может ли некоторый ненулевой вектор образовывать с векторами $\bar{i}, \bar{j}$ и $\bar{k}$ углы, равные соответственно: а) $120°, 135°, 45°$; б) $120°, 135°, 60°$?

Δ Направляющие косинусы любого вектора связаны единственным соотношением: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Так как:

а) $\cos^2 120° + \cos^2 135° + \cos^2 45° = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq 1$, следовательно с векторами $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ никакой вектор не может образовывать углы $120°, 135°$ и $45°$ соответственно;

б) $\cos^2 120° + \cos^2 135° + \cos^2 60° = 1$, то такие углы возможны. ▲

Пример 14. Дан треугольник: $A(4; 1), B(7; 5)$ и $C(-4; 7)$. Найти координаты точки D пересечения биссектрисы угла A со стороной BC.

Δ Найдем длины сторон треугольника AB и AC: $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $AC = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10$.

Как известно, $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|DB|}$. Таким образом, точка D делит отрезок CD в отношении $\lambda = 2$. Поэтому $X_D = \frac{X_C + 2X_B}{1+2} = \frac{10}{3}$; $Y_D = \frac{Y_C + 2Y_B}{1+2} = \frac{17}{3}$. Итак, $D\left(\frac{10}{3}; \frac{17}{3}\right)$. ▲

Пример 15. Найти две точки A и B, если известно, что точка $C(-5; 4)$ делит отрезок AB в отношении $3:4$, а точка $D(6; -5)$ – в отношении $2:3$.

Δ Пусть $A(X_A; Y_A), B(X_B; Y_B)$. Тогда имеем

$$-5 = \frac{X_A + \frac{3}{4}X_B}{\frac{3}{4}+1},\ 4 = \frac{Y_A + \frac{3}{4}Y_B}{\frac{3}{4}+1},\ 6 = \frac{X_A + \frac{2}{3}X_B}{\frac{2}{3}+1},\ -5 = \frac{Y_A + \frac{2}{3}Y_B}{\frac{2}{3}+1}.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем $X_A = 160, X_B = -225$, $Y_A = -131,\ Y_B = 184$, т. е. $A(160; -131), B(-225; 184)$. ▲

Пример 16. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, полярная ось направлена по биссектрисе первого координатного угла. Даны декартовы прямоугольные координаты точек $M_1(-1; 1), M_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2}), M_3(1; \sqrt{3}), M_4(-\sqrt{3}; 1)$ и $M_5(2\sqrt{3}; -2)$. Определить полярные координаты этих точек.

Δ Найдем длины радиус-векторов этих точек: $r_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, r_2 = \sqrt{2+2} = 2$, $r_3 = \sqrt{1+3} = 2, r_4 = \sqrt{3+1} = 2, r_5 = \sqrt{12+4} = 4$.

Найдем углы, которые образуют радиус-векторы этих точек с осью OX:

$\varphi_1 = \frac{3\pi}{4}, \varphi_2 = -\frac{\pi}{4}, \varphi_3 = \frac{\pi}{3}, \varphi_4 = \frac{5}{6}\pi, \varphi_5 = -\frac{\pi}{6}$.

Тогда, очевидно, $\theta_1 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}, \theta_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$,

$\theta_4 = \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{12}\pi$, $\theta_5 = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{5}{12}\pi$. Таким образом, указанные точки имеют следующие полярные координаты:

$$M_1\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{2}\right), M_2\left(2; -\frac{\pi}{2}\right), M_3\left(2; \frac{\pi}{12}\right), M_4\left(2; \frac{7}{12}\pi\right), M_5\left(4; -\frac{5}{12}\pi\right). \blacktriangle$$

Пример 17. Найти уравнение линии в декартовой прямоугольной системе координат, если в полярной системе координат эта линия задана уравнением $r = \frac{3}{4 - \cos\theta}$.

Δ Так как $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, получим

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{4 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \sim 1 = \frac{3}{4\sqrt{x^2 + y^2} - x} \sim 4\sqrt{x^2 + y^2} = 3 + x \sim$$

$$\sim \begin{cases} 16\,(x^2 + y^2) = 9 + 6x + x^2 \\ x \geq -3 \end{cases} \sim 15x^2 + 16y^2 - 6x - 9 = 0. \blacktriangle$$

Пример 18. Найти угол, образованный единичными векторами $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, если известно, что векторы $\bar{a} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$ и $\bar{b} = 5\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2$ перпендикулярны.

Δ Находим скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2, 5\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2) = 5\bar{e}_1^2 - 4(\bar{e}_1, 2\bar{e}_2) + 10(\bar{e}_2, 2\bar{e}_1) - 8\bar{e}_2^2 =$$

$= -3 + 6(\bar{e}_1, 2\bar{e}_2)$, т. к. $\bar{a} \perp \bar{b}$, то $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$. Отсюда $(\bar{e}_1, 2\bar{e}_2) = 1 \cdot 1 \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. $\blacktriangle$

Пример 19. Даны три вектора: $\bar{a} = (1; -3; 4)$, $\bar{b} = (3; -4; 2)$ и $\bar{c} = (-1; 1; 4)$. Вычислить $пр_{\,\bar{b}+\bar{c}}\,\bar{a}$.

Δ Пусть $\bar{d} = \bar{b} + \bar{c} = (2; -3; 6)$.

Тогда $пр_{\,\bar{d}}\,\bar{a} = \frac{(\bar{d}, \bar{a})}{|\bar{d}|} = \frac{2 + 9 + 24}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{35}{7} = 5$. $\blacktriangle$

Пример 20. Найти проекцию вектора $\bar{a} = (4; -3; 2)$ на вектор, составляющий одинаковые тупые углы с осями координат.

Δ В качестве вектора, составляющего одинаковые тупые углы с осями координат, можно взять вектор $\bar{b} = -\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$. Действительно,

$$\bar{b}_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}i - \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{k}.$$

Следовательно, $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тогда $пр_{\bar b}\,\bar a=\dfrac{(\bar b,\bar a)}{|\bar b|}=\dfrac{-4+3-2}{\sqrt3}=-\sqrt3$. ▲

Пример 21. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $AD=1$, $AB=2$, $AA_1=3$. Найти угол между скрещивающимися прямыми AC_1 и B_1D_1.

Δ Выберем систему координат с началом в точке A и с осями OX, OY и OZ, совпадающими соответственно с ребрами AD, AB и AA_1. Тогда $\overline{AC_1}=\bar i+2\bar j+3\bar k$, $\overline{B_1D_1}=\bar i-2\bar j$, $\cos\varphi=\left|\dfrac{(\overline{AC_1},\overline{B_1D_1})}{|\overline{AC_1}|\cdot|\overline{B_1D_1}|}\right|=\left|\dfrac{1-4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt5}\right|=\dfrac{3}{\sqrt{70}}$, $\varphi=\arccos\dfrac{3}{\sqrt{70}}$. ▲

Пример 22. В треугольнике ABC точка H – точка пересечения высот. Известно, что $\overline{AB}=(6;-2)$, $\overline{AC}=(3;4)$. Найти координаты вектора $\overline{AH}$.

Δ Пусть $\overline{AH}=(X;Y)$. Тогда $\overline{BH}=\overline{AH}-\overline{AB}=(X-6;Y+2)$. Так как $\overline{AH}\perp\overline{BC}$ и $\overline{BH}\perp\overline{AC}$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}3x-6y=0,\\3(x-6)+4(y+2)=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}x-2y=0,\\3x+4y=10,\end{cases}\qquad x=2,\ y=1.\ \ \overline{AH}=(2;1).\ ▲$$

Пример 23. Упростить выражение $[\bar i,\ \bar j+\bar k]-[\bar j,\bar i+\bar k]+[\bar k,\bar i+\bar j+\bar k]$.

Δ Как известно, $[\bar i,\ \bar j]=\bar k$, $[\bar j,\bar k]=\bar i$, $[\bar k,\bar i]=\bar j$ и векторное произведение обладает свойством антикоммутативности. Поэтому

$$[\bar i,\ \bar j+\bar k]-[\bar j,\bar i+\bar k]-[\bar k,\bar i+\bar j+\bar k]\sim\bar k-\bar j-(-\bar k+\bar i)+(\bar j-\bar i)=-2\bar i+2\bar k.\ ▲$$

Пример 24. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar a$ и $\bar b$, если $\bar a=3\bar p+2\bar q$, $\bar b=2\bar p-\bar q$, $|\bar p|=4$, $|\bar q|=3$, $(\bar p\,\hat{,}\,\bar q)=\dfrac{3\pi}{4}$.

Δ $S=\big|[a,b]\big|=\big|[3\bar p+\bar q,\,2\bar p-\bar q]\big|=|\,6[\bar p,\bar p]-3[\bar p,\bar q]+2[\bar q,\bar p]-[\bar q,\bar q]\,|=$
$=|5[\bar p,\bar q]|=5\cdot4\cdot3\cdot\dfrac{\sqrt2}{2}=30\sqrt2$. ▲

Пример 25. Найти координаты вектора $\bar x$, если он перпендикулярен векторам $\bar a_1=(4;-2;-3)$ и $\bar a_2=(0;1;3)$, образует с ортом $\bar j$ тупой угол и $|\bar x|=26$.

Δ В качестве вектора, перпендикулярного векторам $\bar a_1$ и $\bar a_2$, можно взять вектор $\bar b=[\bar a_1,\bar a_2]$.

Тогда $\bar b=\begin{vmatrix}\bar i&\bar j&\bar k\\4&-2&-3\\0&1&3\end{vmatrix}=-3\bar i-12\bar j+4\bar k$.

Вектор $\bar x=\lambda\bar b$, причем $\lambda>0$. Так как $\lambda\sqrt{9+144+16}=26$, то $\lambda=2$. Таким образом $\bar x=-6\bar i-24\bar j+8k$. ▲

Пример 26. Объем прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 6. Определить координаты вершины A_1, если координаты вершин одного из оснований призмы следующие: $A(1;0;1)$, $B(2;0;0)$, $C(0;1;0)$.

Δ Так как координаты точки A известны, то для нахождения координат точки A_1 достаточно знать координаты вектора $\overline{AA_1}$. Найдем вектор:

$$\bar{n}=[\overline{AB},\overline{AC}]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}.$$

Так как $|\bar{n}|=\sqrt{6}$, то $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}|\bar{n}|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Высота призмы $h=\left|\overline{AA_1}\right|=6:\dfrac{\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{6}$. Призма прямая, поэтому $\overline{AA_1}=\pm 2(\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k})$. Если $O(0;0;0)$, то $\overline{OA_1}=\overline{OA}+\overline{AA_1}$:

1) $\overline{OA_1}=(1;0;1)+(2;4;2)=(3;4;3)$;

2) $\overline{OA_1}=(1;0;1)-(2;4;2)=(-1;-4;-1)$.

Следовательно, существуют две точки, удовлетворяющие условиям задачи: $A_1'(3;4;3)$ и $A_1''(-1;-4;-1)$. ▲

Пример 27. Показать, что векторы $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}+m\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}+(m+1)\bar{k}$ и $\bar{c}=\bar{i}-\bar{j}+m\bar{k}$ ни при каком значении m не могут быть компланарными.

Δ Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Найдем $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m+1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix}=2\neq 0$.

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ не являются компланарными. ▲

Пример 28. Даны вершины тетраэдра $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;0)$, $D(4;1;2)$. Найти его объем и длину высоты, опущенной из вершины D.

Δ Имеем

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|(\overline{AB},\,\overline{AC},\,\overline{AD})\right|,\quad h=\frac{\left|(\overline{AB},\overline{AC},\,\overline{AD})\right|}{\left|[\overline{AB},\,\overline{AC}]\right|}.$$

Так как $\overline{AB}(3;0;3)$, $\overline{AC}(1;1;-2)$, то

$$[\overline{AB},\,\overline{AC}]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(-3;9;3),\text{ и }\left|[\overline{AB},\,\overline{AC}]\right|=3\sqrt{11}.$$

Далее, $\overline{AD}=(4;1;0)$, $(\overline{AB},\overline{AC},\,\overline{AD})=(\overline{AD},[\overline{AB},\overline{AC}]=4(-3)+1\cdot 9+0\cdot 3=-3$.

Следовательно, $V_{ABCD} = \dfrac{1}{2}$, $h = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$. ▲

Дополнительные задачи

1. Доказать, что $ABCD$ – параллелограмм, если $\overline{AB} = 2\overline{a} - 3\overline{b} + \overline{c}$, $\overline{AC} = \overline{a} - \overline{b} + 2\overline{c}$, $\overline{AD} = -\overline{a} + 2\overline{b} + \overline{c}$.

2. Найти координаты, длину и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$, если $A(4, -5, 2)$, $B(2, -3, 1)$.

Ответ: $\overline{AB}(-2, 2, -1)$, $\left|\overline{AB}\right| = 3$, $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma = -\dfrac{1}{3}$.

3. Найти координаты вектора $\overline{a}$, если его длина равна 2, и он образует с осями OX, OY и OZ углы $135°, 60°$ и $60°$ соответственно.

Ответ: $\overline{a}(-\sqrt{2}, 1, 1)$.

4. Дан треугольник ABC, $A(-2, 3, 6)$, $B(-3, 5, 8)$, $C(2, 3, 3)$. Найти:

а) вектор $\overline{b}$, направленный по биссектрисе внутреннего угла при вершине A, если $\left|\overline{b}\right| = 5\sqrt{6}$;

б) координаты точки D пересечения этой биссектрисы со стороной BC.

Ответ: а) $\overline{b}(7, 10, 1)$; б) $D\left(-1\dfrac{1}{8}, 4\dfrac{1}{4}, 6\dfrac{1}{8}\right)$.

5. Доказать, что векторы $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j}, \overline{b} = i - 3\overline{j}$ и $\overline{c} = 2\overline{i} + 4\overline{j}$ линейно зависимы. Можно ли выразить вектор $\overline{b}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{c}$?

Ответ: нет.

6. Найти работу силы $\overline{F} = \overline{i} + \overline{k}$ при перемещении материальной точки на вектор $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$.

Ответ: 4.

7. Длины базисных векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ равны соответственно $1, 1, 2$; углы между ними равны $\angle(\overline{e}_1, \overline{e}_2) = 90°$, $\angle(\overline{e}_1, \overline{e}_3) = \angle(\overline{e}_2, \overline{e}_3) = 60°$. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (-1; 0; 2)$, $\overline{b} = (2; -1; 1)$.

Ответ: $\sqrt{94}$.

8. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны. При каких значениях скаляра λ коллинеарны векторы $\lambda\overline{a} + \overline{b}$ и $3\overline{a} + \lambda\overline{b}$?

Ответ: $\lambda = \pm\sqrt{3}$.

9. Векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ некомпланарны. При каких значениях скаляра λ компланарны векторы $\overline{a} + 2\overline{b} + \lambda\overline{c}$, $4\overline{a} + 5\overline{b} + 6\overline{c}$, $7\overline{a} + 8\overline{b} + \lambda^2\overline{c}$?

Ответ: $\lambda = 3, \lambda = -4$.

10. Даны точки $A(1, -1, 0)$, $B(5, 3, -7)$, $C(8, -1, -1)$, $D(1, 2, 3)$. Найти:

а) скалярное произведение $(\overline{AB}, \overline{AC})$; б) косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; в) векторное произведение $[\overline{AB}, \overline{AC}]$; г) смешанное произведение $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$.

Ответ: а) 35; б) $\frac{7\sqrt{2}}{18}$; в) $(-4, -45, -28)$; г) -219.

11. Доказать, что четыре точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ и $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

12. Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2; 0; 2)$ и $D(5; -2; 0)$ разделен на три равные части.

Ответ: $(-1; 2; 4)$ и $(8; -4; -2)$.

13. Даны векторы $\overline{a} = (1; 1)$ и $\overline{b} = (1; -1)$. Найти косинус угла между векторами $\overline{x}$ и $\overline{y}$, удовлетворяющими системе уравнений $\begin{cases} 2\overline{x} + \overline{y} = \overline{a} \\ \overline{x} + 2\overline{y} = \overline{b} \end{cases}$.

Ответ: $-\frac{4}{5}$.

14. Даны векторы $\overline{a} = (1; 3)$, $\overline{b} = (2; -1)$ и $\overline{c} = (-4; 1)$. Найти числа α и β такие, что $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$.

Ответ: $\alpha = \frac{2}{7}, \beta = \frac{13}{7}$.

15. Проверить, что векторы $\overline{a} = (-5; -1)$ и $\overline{b} = (-1; 3)$ образуют базис на плоскости. Найти координаты векторов $\overline{c} = (-1; 2)$ и $\overline{d} = (2; -6)$ в этом базисе.

Ответ: $\overline{c} = \left(\frac{1}{16}; \frac{11}{16}\right)$, $\overline{d} = (0; -2)$.

16. Проверить, образуют ли векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ базис в $\mathbb{R}^3$. Если да, то найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе:

а) $\overline{a}\,(2, -1, 4)$, $\overline{b}\,(1, -1, 0)$, $\overline{c}\,(-1, 3, -3)$, $\overline{d}\,(2, 1, 12)$;

б) $\overline{a}\,(1, 2, 5)$, $\overline{b}\,(1, 3, 2)$, $\overline{c}\,(-2, -7, 1)$, $\overline{d}\,(6, 16, 16)$.

Ответ: а) да, $\overline{d} = 3\overline{a} - 4\overline{b}$; б) да, $\overline{d} = 3\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$.

17. В полярной системе координат даны две точки $M_1\left(5; \frac{\pi}{4}\right)$ и $M_2\left(8; -\frac{\pi}{12}\right)$. Найти расстояние d между ними.

Ответ: $d = 7$.