Прямая линия на плоскости

Пример 1. Прямая L задана общим уравнением $x-3y+6=0$.

Записать уравнение прямой L: 1) с угловым коэффициентом; 2) в отрезках; 3) каноническое; 4) параметрическое; 5) нормальное.

Δ 1) $y=\dfrac{1}{3}x+2$; 2) $\dfrac{x}{-6}+\dfrac{y}{2}=1$; 3) $x-6=3y$, $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y}{1}$;

4) $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y}{1}=t$, $x=3t+6$, $y=t$; 5) $-\dfrac{x}{\sqrt{10}}+\dfrac{3}{\sqrt{10}}y-\dfrac{6}{\sqrt{10}}=0$. ▲

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;4)$, и параллельной прямой:

1) $x-2y+5=0$; 2) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}$; 3) $x=2$; 4) $y=-1$;

5) $x=3+t,\ y=4-7t$.

Δ 1) Нормальный вектор прямой $x-2y+5=0$ $\bar{n}=(1;-2)$. Так как прямые параллельны, в качестве нормального вектора искомой прямой можно взять вектор $\bar{n}$. Тогда уравнение прямой: $(x+3)-2(y-4)=0 \sim x-2y+11=0$;

2) В качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\bar{q}=(2;3)$. Уравнение прямой: $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-4}{3}$;

3) Очевидно, $x=-3$;

4) Очевидно, $y=4$;

5) Вектор $\bar{q}=(1;-7)$ является направляющим вектором прямой. Уравнение прямой: $x=-3+t$, $y=4-7t$. ▲

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;4)$, и перпендикулярной прямой: 1) $x-2y+5=0$; 2) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}$; 3) $x=2$; 4) $y=-1$;

5) $x=3+t,\ y=4-7t$.

Δ 1) Вектор $\bar{q}=(1;-2)$ является направляющим вектором искомой прямой. Уравнение прямой: $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-4}{-2}$;

2) Вектор $\bar{n}=(2;3)$ является нормальным вектором искомой прямой. Уравнение прямой: $2(x+3)+3(y-4)=0 \sim 2x+3y-6=0$;

3) Очевидно, $y=4$;

4) Очевидно, $x=-3$;

5) Вектор $\bar{n}=(1;-7)$ является нормальным вектором прямой. Уравнение прямой: $1(x+3)-7(y-4)=0 \sim x-7y+31=0$. ▲

Пример 4. Составить уравнение прямой L, которая проходит через точку $M_0(2;10)$ и отсекает от второго координатного угла треугольник с площадью, равной 5.

Δ Запишем уравнение прямой в отрезках: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

Тогда $\begin{cases} \dfrac{2}{a}+\dfrac{10}{b}=1, \\ -ab=10, \\ a<0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2b+10a=ab, \\ ab=-10, \\ a<0, \end{cases}$ $a=-2, b=5$.

Уравнение прямой L: $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{5}=1$, $5x-2y+10=0$. ▲

Пример 5. Найти угол между прямыми $2x+3y-5=0$ и $x-3y-7=0$.

Δ Углом между прямыми называется наименьший из двух смежных углов, образованных этими прямыми. Значение φ (меньшего из углов) можно вычислить по формуле $\cos\varphi=\dfrac{|(\overline{n}_1, \overline{n}_2)|}{|\overline{n}_1|\cdot|\overline{n}_2|}$, где $\overline{n}_1=(2;3)$, $\overline{n}_2=(1;-3)$ – нормальные векторы этих прямых, т. е.

$$\cos\varphi=\frac{|2-9|}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{1+9}}=\frac{7}{\sqrt{130}},\ \varphi=\arccos\frac{7}{\sqrt{130}}. \ ▲$$

Пример 6. Даны две точки: $P(2;3)$ и $Q(-1;0)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно к отрезку PQ.

Δ Угловой коэффициент прямой PQ: $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$. Тогда угловой коэффициент искомой прямой $k_1=-\dfrac{1}{k}=-1$, а ее уравнение $y-0=-1(x+1)$, $x+y+1=0$. ▲

Пример 7. Составить уравнение прямой L_3, симметричной прямой L_1 $(3x-y+5=0)$, относительно прямой L_2 $(x+y-1=0)$.

Δ Угловые коэффициенты прямых L_1 и L_2: $k_1=3$, $k_2=-1$. Пусть угловой коэффициент прямой L_3 равен k_3. Тогда $\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}=\dfrac{k_2-k_3}{1+k_2\cdot k_3}$, т. е. $\dfrac{3+1}{1-3}=\dfrac{-1-k_3}{1-k_3}$, $k_3=\dfrac{1}{3}$.

Найдем точку пересечения всех трех прямых:

$\begin{cases} 3x-y+5=0, \\ x+y-1=0, \end{cases}$ $x=-1$, $y=2$.

Итак, уравнение прямой L_3: $y-2=\frac{1}{3}(x+1)$, $x-3y+7=0$. ▲

Пример 8. Найти длину h высоты, опущенной из вершины $A(4;4)$ треугольника ABC, если $B(-6;-1)$, $C(-2;-4)$.

Δ Уравнение прямой BC: $\frac{x+6}{-2+6}=\frac{y+1}{-4+1}$, $3x+4y+22=0$.

Поэтому $h=\frac{|3\cdot4+4\cdot4+22|}{\sqrt{3^2+4^2}}=10$. ▲

Пример 9. Записать уравнение биссектрисы L_0 того угла, образованного прямыми L_1 $(x+7y=0)$ и L_2 $(x-y-4=0)$, внутри которого лежит точка $A(1;1)$.

Δ Отклонения точки A от прямых L_1 и L_2 имеют следующие знаки:

$$d_{L_1}(A)=\frac{1+7\cdot1}{\sqrt{50}}>0 \text{ и } d_{L_2}(A)=\frac{1-1-4}{\sqrt{2}}<0.$$

Любая точка $M(x;y)$, принадлежащая L_0, равноудалена от прямых L_1 и L_2, имеет отклонения от этих прямых тех же знаков, что и точка A.

Таким образом, все точки биссектрисы удовлетворяют уравнению

$$\frac{x+7y}{\sqrt{50}}=-\frac{x-y-4}{\sqrt{2}} \sim 3x+y-10=0. \ ▲$$

Пример 10. Найти точку $B(x_1;y_1)$, симметричную точке $A(8;12)$ относительно прямой L $(x-2y+6=0)$.

Δ Приведем уравнение прямой L к каноническому виду: $\frac{x-6}{2}=\frac{y}{1}$. Вектор $\overline{AB}=(x_1-8;\, y_1-12)$ перпендикулярен вектору $\bar{a}=(2;1)$, поэтому $2(x_1-8)+1(y_1-12)=0$. Точка $Q\left(\frac{8+x_1}{2};\frac{12+y_1}{2}\right)$, являющаяся серединой отрезка AB, принадлежит прямой L, т. е. $\frac{8+x_1}{2}-2\,\frac{12+y_1}{2}+6=0$.

Решив полученную систему уравнений, найдем координаты точки B:

$$\begin{cases}2x_1+y_1-28=0,\\ x_1-2y_1-4=0,\end{cases} \quad x=12,\ y=4, \text{ т. е. } B(12;4). \ ▲$$

Пример 11. Точка $A(3;-2)$ является вершиной квадрата $ABCD$, а точка $M(1;1)$ – точкой пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон квадрата.

Δ Запишем уравнение прямой AM: $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{3}$.

Угловой коэффициент этой прямой $k=-\frac{3}{2}$. Для одной из сторон квадрата, проходящих через точку A, выполняется равенство $\dfrac{k_1+\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}k_1}=1,\quad k_1=-\dfrac{1}{5}$,

где k_1 – угловой коэффициент этой прямой.

Тогда угловой коэффициент другой стороны, проходящей через точку A, $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=+5$.

Найдем координаты точки C: $\dfrac{x+3}{2}=1,\ \dfrac{y-2}{2}=1;\ C(-1;4)$.

Запишем уравнение сторон квадрата:

$$y+2=-\frac{1}{5}(x-3),\ x+5y+7=0;$$
$$y+2=5(x-3),\ 5x-y-17=0;$$
$$y-4=-\frac{1}{5}(x+1),\ x+5y-19=0;$$
$$y-4=5(x+1),\ 5x-y+9=0.\ \blacktriangle$$

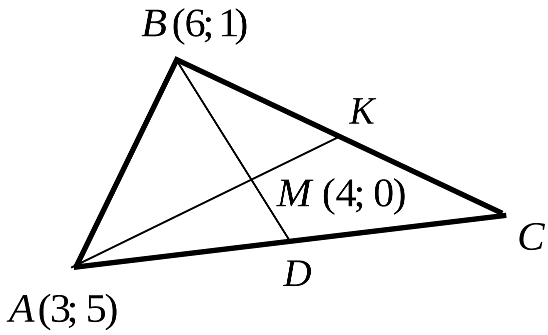

Рис. 6

Пример 12. Составить уравнения сторон треугольника, зная две его вершины $A(3;5)$, $B(6;1)$ и точку пересечения его медиан $M\,(4;0)$ (рис. 6).

Δ Пусть $O(0;0)$ – начало системы координат. Тогда

$$\overline{BM}=(-2;-1),\ \overline{BD}=\frac{3}{2}\overline{BM}=\left(-3;-\frac{3}{2}\right),$$
$$\overline{AM}=(1;-5),\ \overline{AK}=\frac{3}{2}\overline{AM}=\left(\frac{3}{2};-\frac{15}{2}\right),$$
$$\overline{OD}=\overline{OB}+\overline{BD}=\left(3;-\frac{1}{2}\right),\text{ т. е. } D\left(3;-\frac{1}{2}\right),$$
$$\overline{OK}=\overline{OA}+\overline{AK}=\left(\frac{9}{2};-\frac{5}{2}\right),\text{ т. е. } K\left(\frac{9}{2};-\frac{5}{2}\right).$$

Составляем уравнения сторон треугольника как прямых, проходящих через две заданные точки:

$$AB:\frac{x-3}{6-3}=\frac{y-5}{1-5},\ 4x+3y-27=0;\qquad AC:\frac{x-3}{3-3}=\frac{y-5}{-\frac{1}{2}-5},\ x=3;$$

$$BC: \frac{x-6}{\frac{9}{2}-6} = \frac{y-1}{-\frac{5}{2}-1},$$

$$7x-3y-39=0. \ \blacktriangle$$

Пример 13. Даны координаты двух вершин треугольника $A(-1;3)$, $B(2;5)$ и точка пересечения его высот $H(1;4)$ (рис. 7). Найти координаты третьей вершины треугольника и составить уравнения его сторон.

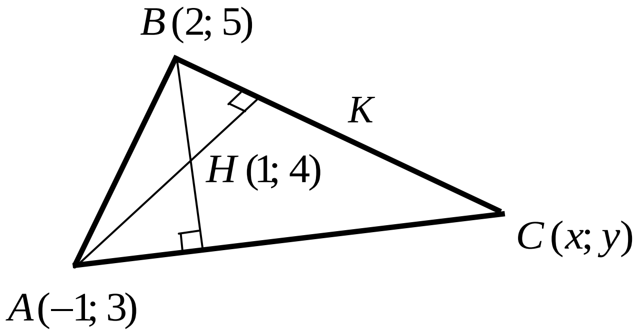

Рис. 7

Δ Пусть координаты точки $C(x;y)$. Тогда $\overline{AH}=(2;1)$, $\overline{HB}=(1;1)$, $\overline{AC}=(x+1;\, y-3)$, $\overline{BC}=(x-2;\, y-5)$. Так как $\overline{AC}\perp\overline{HB}$ и $\overline{BC}\perp\overline{AH}$, получаем систему уравнений: $\begin{cases} x+1+y-3=0, \\ 2x-4+y-5=0, \end{cases}$ откуда найдем координаты точки $C(7;-5)$.

Зная координаты вершин треугольника, записываем уравнения его сторон:

$$AB: \frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{2}, \quad 2x-3y+11=0; \quad AC: \frac{x+1}{8}=\frac{y-3}{-8}, \quad x+y-2=0;$$

$$BC: \frac{x-2}{5}=\frac{y-5}{-10}, \quad 2x+y-9=0. \ \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Через точку $M(3;5)$ провести прямую так, чтобы она отсекала от координатного угла равнобедренный треугольник.

Ответ: $x+y-8=0,\ x-y+2=0$.

2. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, если уравнение гипотенузы $y=7x-4$ и вершина прямого угла $C(3;4)$.

Ответ: $y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4},\ y=-\frac{4}{3}x+8$.

3. Дан треугольник ABC, $A(6;4)$, $B(-3;5)$, $C(-2;-6)$. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно медиане, проходящей через вершину B.

Ответ: $6x+5y-56=0$.

4. Стороны треугольника расположены на прямых $x+2y-1=0$, $5x+4y-17=0$, $x-4y+11=0$. Составить уравнения высот треугольника.

Ответ: $2x-y+1=0$, $4x-5y+22=0$, $4x+y-18=0$.

5. Из точки $M\,(5;\,4)$ выходит луч света под углом $\varphi = \operatorname{arctg} 2$ к оси OX и отражается от нее. Написать уравнение падающего и отраженного лучей.

Ответ: $y = 2x - 6,\; y = -2x + 6$.

6. Вершина равнобедренного треугольника находится в точке $(-7;15)$, а середина его основания в точке $(1;3)$. Составить уравнения сторон треугольника, если тангенс угла при основании равен 4.

Ответ: $2x - 3y + 7 = 0$, $14x + 5y + 23 = 0$, $10x + 11y - 95 = 0$.

7. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(2;-4)$, и уравнения биссектрис двух его углов: $x + y - 2 = 0$ и $x - 3y - 6 = 0$.

Ответ: $x + 7y - 6 = 0,\; x - y - 6 = 0,\; 7x + y - 10 = 0$.

8. Установить взаимное расположение двух данных прямых на плоскости (совпадают, параллельны, пересекаются); в случае пересечения найти общую точку прямых и косинус угла между ними:

а) $2x + 3y = 0$ и $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 2 - t; \end{cases}$

б) $x + 2y = 15$ и $\begin{cases} x = 5 + 4t, \\ y = -2 - 2t; \end{cases}$

в) $3x + 4y - 20 = 0$ и $\begin{cases} x = 4 - 8t, \\ y = 2 + 6t; \end{cases}$

г) $x - 5y + 9 = 0$ и $x + y - 3 = 0$.

Ответ: а) $(15;-10)$, $\dfrac{5}{\sqrt{26}}$; б) параллельны; в) совпадают; г) $(1;2)$, $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

9. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(3;1)$ и наклоненных к прямой $2x + 3y - 1 = 0$ под углом $45°$.

Ответ: $5x + y - 16 = 0$, $x - 5y + 2 = 0$.