МОДУЛЬ 2

ТЕМА 4 Равносильные преобразования формул и нормальные формы булевой алгебры. Элементы логики высказываний

4.1 Дизъюнктивные нормальные формы

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и их инверсии назовем *литералами* и введем обозначение a^σ, где $a^\sigma = a$, если $\sigma = 1$, и $a^\sigma = \bar{a}$, если $\sigma = 0$. *Элементарной конъюнкцией* K_i является многоместная конъюнкция попарно различных литералов, т. е. $K_i = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_r}^{\sigma_r}$. К элементарным конъюнкциям относятся также одиночные литералы и константа 1 – конъюнкция, состоящая из пустого множества литералов. Число литералов r элементарной конъюнкции называется ее *рангом*. Элементарная конъюнкция называется *полной* относительно переменных x_1, x_2, …, x_n, если она содержит символы всех переменных (со знаком отрицания или без него). Ранг таких конъюнкций равен n.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) – это выражение вида $\bigvee\limits_{i=1}^{m} K_i$, т. е. дизъюнкция элементарных конъюнкций. Примером дизъюнктивной нормальной формы является выражение $x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3$, где две конъюнкции имеют ранг 2 и одна конъюнкция – ранг 3. Одна элементарная конъюнкция также может считаться ДНФ.

4.2 Дизъюнктивное разложение Шеннона

Т е о р е м а Ш е н н о н а. Любая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при любом m $(1 \le m \le n)$ может быть представлена в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_m^{\sigma_m} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, x_{m+1}, \ldots, x_n), \qquad (6.1)$$

где дизъюнкция берется по всевозможным 2^m наборам значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Для доказательства теоремы подставим в обе части равенства (6.1) произвольный набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ значений всех n переменных. Заметим, что $x^\sigma = 1$ только при $x = \sigma$ и из всех 2^m конъюнкций $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_m^{\sigma_m}$ правой части формулы (6.1) значение 1 примет единственная конъюнкция, а именно та, для которой $\sigma_1 = \alpha_1$, $\sigma_2 = \alpha_2$, …, $\sigma_m = \alpha_m$. Остальные конъюнкции будут равны 0. Отсюда получим тождество

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \ldots \alpha_m^{\alpha_m} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Представление (6.1) называется *дизъюнктивным разложением функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Получаемые в результате подстановки констант $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ функции

$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$, являющиеся коэффициентами разложения, не зависят от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Из теоремы Шеннона непосредственно вытекают два следующих утверждения, соответствующие двум крайним значениям числа m: $m = 1$ и $m = n$.

Любая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при любом $i = 1, 2, \ldots, n$ может быть представлена в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \vee \overline{x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Любая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть представлена в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

Последнее выражение является представлением булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в СДНФ. Здесь $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ является значением функции на наборе значений аргументов $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, т. е. константой 0 или 1.

Легко построить СДНФ, представляющую произвольную булеву функцию, заданную в табличной форме. Для этого достаточно выделить наборы $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, на которых функция принимает значение 1, и для каждого из них ввести в СДНФ полную элементарную конъюнкцию, где любая переменная x_i присутствует с отрицанием, если $\sigma_i = 0$, и без отрицания, если $\sigma_i = 1$.

Очевидно, для любой булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, кроме константы 0, существует единственная СДНФ (с точностью до порядка литералов и конъюнкций). Поэтому данная форма представления булевой функции является *канонической*. Например, СДНФ для функции от трех аргументов, заданной табл. 4.1, имеет следующий вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 .$$

Константа 1 представляется в виде СДНФ, которая содержит все различные полные элементарные конъюнкции, называемые *конституентами единицы* (в литературе используется также термин *минтерм*). Конституента единицы принимает значение 1 на единственном наборе значений переменных.

Таблица 4.1

Задание функции $f(x, y, z)$

x y z	$f(x, y, z)$
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	0

4.3 Конъюнктивные нормальные формы

Элементарной дизъюнкцией D_i является многоместная конъюнкция попарно различных литералов, т. е. $D_i = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$. К элементарным дизъюнкциям относятся также одиночные литералы и константа 0 – дизъюнкция, состоящая из пустого множества литералов. Число литералов r элементарной дизъюнкции называется ее *рангом*. Элементарная дизъюнкция называется *полной* относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если она содержит символы всех переменных (со знаком отрицания или без него). Ранг таких дизъюнкций равен n.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) – это выражение вида $\bigwedge_{i=1}^{m} D_i$, т. е. конъюнкция элементарных дизъюнкций. Примером конъюнктивной нормальной формы является выражение $(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_2)$. Одна элементарная дизъюнкция также может считаться КНФ.

Согласно принципу двойственности формулу (6.1) можно преобразовать в следующее выражение, которое также справедливо:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_m^{\bar{\sigma}_m} \vee f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)).$$

Эта формула называется *конъюнктивным разложением функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Справедливость ее может быть доказана так же, как справедливость формулы (6.1). Также крайними случаями конъюнктивного разложения являются разложение по одной переменной и по всем переменным. Последнее называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ) и имеет вид

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} \vee f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)).$$

СКНФ, представляющую произвольную булеву функцию, так же, как ее СДНФ, легко построить по табличному заданию этой функции. Согласно формуле достаточно выделить наборы $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, на которых функция принимает значение 0 (если $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$, то весь сомножитель $(x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} \vee 1)$ обращается в 1), и для каждого из них ввести в СДНФ полную элементарную дизъюнкцию, где любая переменная x_i присутствует с отрицанием, если $\sigma_i = 1$, и без отрицания, если $\sigma_i = 0$.

Очевидно, для любой булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, кроме константы 1, существует единственная СКНФ (с точностью до порядка литералов и дизъюнкций). Так же, как СДНФ, эта форма представления булевой функции является *канонической*. СКНФ для функции, которую задает табл. 4.1, имеет следующий вид:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

Константа 0 представляется в виде СКНФ, которая содержит все различные полные элементарные дизъюнкции, называемые *конституентами нуля* (в литературе используется также термин *макстерм*). Конституента нуля принимает значение 0 на единственном наборе значений переменных.

4.4 Локальные упрощения ДНФ

Дизъюнктивная нормальная форма *безызбыточна*, если из нее нельзя удалить ни одной элементарной конъюнкции и ни одного литерала из какой-либо конъюнкции. Это равносильно тому, что из представляющей данную ДНФ троичной матрицы нельзя удалить ни одну из строк и нельзя ни одно из значений 0 или 1 заменить на «–». Локальные упрощения ДНФ сводятся к поиску и последовательному удалению таких элементарных конъюнкций и литералов до тех пор, пока данная ДНФ не станет безызбыточной. Простейшие случаи сокращения определяются формулами:

$$A\,x \vee A = A; \quad A\,\bar{x} \vee x = A \vee x; \quad A\,x \vee B\,\bar{x} \vee AB = A\,x \vee B\,\bar{x}.$$

Более сложный случай представляет ДНФ

$$\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,x_3 \vee x_1\,\bar{x}_2\,x_4 \vee x_1\,x_2\,x_3 \vee\vee\,\bar{x}_1\,x_2\,x_4 \vee x_3\,x_4,$$

где конъюнкция $x_3\,x_4$ является избыточной. Действительно, если ее заменить на $x_3\,x_4\,1 = x_3\,x_4\,(x_1\,x_2 \vee x_1\,\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\,x_2 \vee \bar{x}_1\,\bar{x}_2)$, а затем раскрыть скобки, то каждая из конъюнкций ранга 4 окажется поглощаемой некоторой из конъюнкций ранга 3, присутствующей в исходной ДНФ.

Исходя из сказанного, отметим два вида избыточности:

$$D = k \vee D' = D' \quad \text{и} \quad D = xk \vee D' = k \vee D',$$

где k – элементарная конъюнкция; x – литерал, входящий в элементарную конъюнкцию xk; D – некоторая ДНФ; D' – ДНФ, получаемая из D удалением конъюнкции k или удалением литерала x.

В первом случае элементарная конъюнкция k избыточна, если $k \vee D' = D'$. Это значит, что k и D' находятся в отношении *формальной импликации*, т. е. $k \Rightarrow D'$. Функция g *имплицирует* функцию f, если f имеет значение 1 везде, где имеет значение 1 функция g. В рассматриваемом случае ДНФ D' обращается в единицу при любом наборе значений переменных, обращающем конъюнкцию k в единицу, независимо от того, какие значения принимают переменные, не входящие в k.

Пусть троичная матрица V представляет ДНФ D', а троичный вектор v – элементарную конъюнкцию k. Тогда результатом подстановки в D' значений переменных, обращающих конъюнкцию k в единицу, является минор матрицы V, образованный строками, не ортогональными вектору v, и столбцами, соответствующими компонентам вектора v и имеющими значение «–». Если этот минор является вырожденной матрицей, т. е. D' тождественно равна единице, то конъюнкция k избыточна. В противном случае вектор, ортогональный всем строкам полученного минора, представляет набор значений переменных, обращающий D' в нуль.

Рассмотрим следующую троичную матрицу и проверим на избыточность ее первую строку:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & - & 0 & 1 & - \\ 0 & 1 & 1 & 0 & - & 0 \\ 0 & - & 0 & 0 & 1 & - \\ - & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & - & - & 1 \\ 1 & - & 1 & - & 0 & - \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}.$$

Минор, образованный столбцами x_3 и x_6, где элементы первой строки имеют значение «–», и строками 2, 3, 4 и 5, не ортогональными первой строке, имеет вид

$$\begin{array}{cc} x_3 & x_6 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & - \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}.$$

Эта матрица является вырожденной, следовательно, первая строка избыточна. Любой входящий в нее булев вектор принадлежит некоторому интервалу, представляемому какой-либо из строк данной матрицы.

Удалив строку 1, получим матрицу, в которой строка 2 ортогональна всем остальным ее строкам. Это значит, что никакой булев вектор, принадлежащий интервалу, представляемому данной строкой, не принадлежит никакому из других интервалов, представляемых остальными строками. Соответствующий минор является пустой матрицей (с пустым множеством строк). Такая матрица представляет константу 0. Таким образом, строка 2 не является избыточной.

Что касается строки 3, то соответствующий минор является однострочной невырожденной матрицей:

$$\begin{array}{cc} x_2 & x_6 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \; 5.$$

Ортогональным вектором для данной строки является (0 –). Подставив 0 во вторую компоненту строки 3, получим вектор, ортогональный всем строкам матрицы. Строка 3 также является неизбыточной для заданной матрицы.

Выполняя подобные построения над остальными строками, убедимся, что они также не являются избыточными.

Рассмотрим второй вид избыточности в ДНФ, когда $D = xk \vee D' = k \vee D'$. Здесь избыточным является литерал x. Правую часть этого равенства можно представить следующим образом:

$$k \vee D' = k(x \vee \bar{x}) \vee D' = xk \vee D' \vee \bar{x}k = D \vee \bar{x}k.$$

Отсюда видно, что литерал x в выражении $xk \vee D'$ является избыточным, если конъюнкция $\bar{x}k$ является избыточной в выражении $D \vee \bar{x}k$. Следовательно, задача определения избыточности литерала в ДНФ сводится к предыдущей задаче – задаче определения избыточности элементарной конъюнкции.

Удаление литерала из ДНФ в матричном представлении выражается в замене нуля или единицы в троичной матрице на значение «–». На основании предыдущих рассуждений это можно сделать, если вектор, полученный из строки, содержащей данный нуль или единицу, заменой этого значения на противоположное ему значение (т. е. 0 на 1 или 1 на 0), является избыточным для рассматриваемой матрицы.

Таким образом, для того чтобы решить вопрос о том, можно ли заменить 0 (или 1) в i-й строке и j-м столбце на значение «–», надо построить минор, образованный столбцами, где i-я строка имеет значения «–», и строками, не ортогональными вектору, полученному из i-й строки заменой 0 (или 1) в j-м столбце на противоположное значение. Если полученный минор оказался вырожденной матрицей, то такая замена возможна.

Рассмотрим матрицу

$$\begin{array}{c c}
\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & - & 0 \\ 0 & - & 0 & 0 & 1 & - \\ - & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & - & - & 1 \\ 1 & - & 1 & - & 0 & - \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}
\end{array}.$$

Чтобы узнать, является ли 0 в строке 1 и столбце x_6 избыточным, построим минор, образованный единственным столбцом x_5, где строка 1 имеет значение «–», и единственной строкой 3, не ортогональной вектору (0 1 1 0 – 1). Единственный элемент в этом миноре имеет значение 1. Он является невырожденной матрицей. Следовательно, нуль в строке 1 и столбце x_6 нельзя заменить на «–».

Рассмотрим теперь единицу в строке 3 и столбце x_3. Минор, образованный столбцами x_1 и x_4 и строками 2 и 4, не ортогональными вектору (– 1 0 – 1 1), имеет вид

$$\begin{array}{c c}
\begin{matrix} x_1 & x_4 \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ - & - \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}
\end{array}.$$

Вырожденность этого минора говорит о том, что данную единицу можно заменить значением «–». Выполнив такую замену, получим матрицу, эквивалентную исходной матрице:

$$\begin{array}{c c}
\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & - & 0 \\ 0 & - & 0 & 0 & 1 & - \\ - & 1 & - & - & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & - & - & 1 \\ 1 & - & 1 & - & 0 & - \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}
\end{array}.$$

4.5 Алгебра высказываний

Математическая логика представляет собой формальный математический аппарат, изучающий различные способы логических рассуждений. Простейшей из формальных логических теорий называют *алгебру высказываний*.

Высказывание – некоторое утверждение, относительно которого нас интересует только его истинность или ложность. Значения истинности и ложности могут обозначаться буквами И и Л, T (truth) и F (false) или цифрами 1 и 0.

Предложения, представляющие вопрос, приказ или восклицание либо внутренне противоречивое утверждение, не являются высказываниями.

Высказывание называют простым (элементарным), если его истинность не зависит от истинности других высказываний (в утверждении не используются связки). Высказывание называют сложным (составным), если оно зависит от истинности других высказываний (используются связки).

В алгебре высказываний объектом исследования является множество высказываний, а предметом – логические операции, каждую из которых можно рассматривать как сложное высказывание. Данные операции ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) определяются таблицами истинности.

В дальнейшем каждое простое высказывание можно связать с некоторой двоичной переменной: $x = 1$, если простое высказывание истинно, и $x = 0$, если простое высказывание ложно. Поэтому сложное высказывание можно связать с некоторой булевой функцией: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, если сложное высказывание, состоящее из n простых высказываний, истинно, и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, если оно ложно.

Используя подобную связь можно сказать, что алгебра высказываний есть одна из интерпретаций алгебры логических функций.

В дальнейшем будем говорить, что формула истинна или ложна в зависимости от того, истинно или ложно соответствующее ей высказывание.

Формула может быть истинной при одном наборе значений переменных и ложной при другом наборе. Формула, которая является истинной хотя бы при одном наборе значений переменных, называется *выполнимой*. Формула, ложная при всех наборах значений переменных, называется *противоречием (тождественно ложной)*, формула, истинная при всех наборах значений переменных, – *тавтологией (тождественно истинной).*

Установить тип формулы можно с помощью таблиц истинности. При большом числе переменных x_i (при большом числе простых высказываний) таблицы истинности функций, соответствующих этим формулам, очень громоздки. Установить тип формулы (выполнима, тавтология, противоречие) удобно с помощью нормальных форм.

Для этого необходимо:

а) заменить все логические операции булевыми операциями, используя равносильные формулы;

б) заменить знак отрицания, относящийся ко всему выражению, на знаки, относящиеся к отдельным переменным, используя закон де Моргана;

в) избавиться от знаков двойного отрицания;

г) применить в случае необходимости закон дистрибутивности и формулы поглощения.

Формула алгебры высказываний является *тождественно истинной*, когда каждый множитель ее КНФ содержит пару слагаемых, одно из которых является элементарным высказыванием, а другое – его отрицанием.

Формула алгебры высказываний является *тождественно ложной*, когда каждое слагаемое её ДНФ содержит пару сомножителей, один из которых является элементарным высказыванием, а другой – его отрицанием.

Формулы A и B находятся в отношении формальной импликации, точнее A имплицирует B, если формула B истинна на всех наборах переменных, на которых истинна формула A. В таких случаях говорим, что формула B логически следует из формулы A.

Формулы A и B *равносильны* (логически эквивалентны), если любая из них следует из другой. Очевидно, что таблица истинности равносильных формул совпадают.

Рассмотрим основные *тавтологии* использования высказываний:

1) Закон тождества: $a \to a$. Всякое высказывание логично следует из самого себя.

2) Закон противоречия: $\neg(a \wedge \neg a)$. Всякое высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

3) Закон исключения третьего: $a \vee \neg a$. Для всякого высказывания истинно либо оно само либо его отрицание.

4) Закон двойного отрицания: $\neg\neg a \leftrightarrow a$. Отрицание отрицания любого высказывания равносильно самому высказыванию.

5) Закон «истинно из чего угодно»: $a \to (b \to a)$. Если а – истинное высказывание, то формула $b \to a$ истинна.

6) Закон «из ложного что угодно»: $\neg a \to (a \to b)$. Если a – ложное высказывание, то из a следует все, что угодно.

7) Закон *modus ponens*: $(a \wedge (a \to b)) \to b\,(a \wedge (a \to b)) \to b$. Если истинно то, что из a следует b, и a истинно, то b истинно.

8) Закон *modus tollens*: $((a \to b) \wedge \neg b) \to \neg a$. Если из a следует b, а b ложно, то a тоже ложно.

9) закон силлогизма: $((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c)$. Если из a следует b, а из b следует c, то из a следует c.

4.6 Логические отношения и проверка правильности рассуждений

Имеем два высказывания P и Q. Рассмотрим типы логических отношений:

1) Отношение следствия ($P \to Q$). Говорим, что из P следует Q, если Q истинно всякий раз, когда истинно P. Q называют следствием P.

Заметим, что между отношением следствия и импликацией существует тесная связь, но это не одно и то же. Импликация – сложное высказывание, составленное из двух данных, а следствие – отношение между двумя высказываниями. Импликация выражает отношение следствия только тогда, когда таблица истинности импликации содержит одни единицы. Отметим, что высказывания, связанные с импликацией, при отсутствии смысловой связи между посылкой и заключением могут звучать парадоксально. Например, высказывание «Если я не приду на лекцию, то река впадает в Белое море» звучит парадоксально. Между посылкой и заключением в подобных случаях не существует отношения следствия.

2) Два высказывания P и Q эквивалентны, если таблица истинности содержит только единицы. Импликация $P = A \to B$ и контрапозиция импликации $Q = \bar{B} \to \bar{A}$ эквивалентны. Эти формулы в рассуждении заменяют друг друга.

3) Два высказывания P и Q называются несовместимыми, если не существует логической возможности, при которой оба высказывания были бы одновременно истинными, т. е. при истинном значении одного из них другое обязательно ложно.

Чтобы установить совместимость высказываний, необходимо построить их таблицы истинности. Если найдется хотя бы одна строка, в которой все высказывания принимают значение истинно, то данные высказывания будут совместимы, и несовместимы в противном случае.

Рассуждение есть утверждение того, что некоторое высказывание (заключение) следует из других высказываний (посылок). Рассуждение будет правильным, если из конъюнкции посылок следует заключение, т. е. между конъюнкцией посылок и заключением установлено отношение следствия. В этом случае импликация должна быть тавтологией.

Правильность рассуждения можно установить, построив таблицу истинности высказывания $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \to Q$ и убедившись в том, что оно тождественно истинно.

Правильность рассуждения можно установить и методом «от противного». Этот метод заключается в том, что, полагая заключение Q ложным, а некоторые посылки P_i истинными, проверяем, найдется ли хотя бы одна посылка, принимающая значение ложно. Если да, то рассуждение правильно.

4.7 Решение логических задач с помощью уравнений

Логическую задачу можно решить, составив и решив логическое уравнение. Для этого необходимо выполнить следующие действия:

1) ввести булевы переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, соответствующие простым высказываниям;

2) записать условие задачи в виде уравнений $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, $i = 1, \ldots, m$, где $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – логическая функция;

3) свести систему уравнений к уравнению $\bigcap_{i=1}^{m} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, множество корней которого совпадает с множеством корней системы из предыдущего пункта;

4) привести левую часть характеристического уравнения к ДНФ и решить его: приравнять каждое слагаемое ДНФ (СДНФ), независимо от других, к единице, извлечь из уравнения значения переменных. Каждый их набор является решением задачи. Если после упрощения в ДНФ осталось только одно слагаемое, задача имеет единственное решение. В случае, когда в левой части уравнения все слагаемые уничтожены, задача не имеет решения.

Рассмотрим применение этого алгоритма на примере одной из логических задач.

Задача Р. М. Смаллиана «Принцесса и тигр».

В некотором царстве правил король. Однажды он предложил узнику отгадать, в какой комнате находится принцесса, а в какой тигр. Узнику было объявлено, что в каждой комнате находится либо принцесса, либо тигр, однако может оказаться, что сразу в обеих комнатах будет обнаружено по тигру или по принцессе.

На табличках, прикрепленных к двери каждой из комнат, были надписи, представленные в табл. 4.2.

Таблица 4.2

В этой комнате находится принцесса, а в другой комнате сидит тигр. $f_1 = x_1\ \bar{x}_2\ \bar{y}_1 y_2$	В одной из этих комнат находится принцесса, кроме того, в одной из этих комнат сидит тигр. $f_2 = (x_1\ \bar{x}_2 \vee\ \bar{x}_1 x_2)(y_1\ \bar{y}_2 \vee\ \bar{y}_1 y_2)$

Король сообщил узнику, что на одной из таблиц написана правда, на другой – ложь. Какую дверь следует открыть узнику, если он предпочитает принцессу тигру?

Решение:

1) Формулируем простые высказывания:

– x_i – «принцесса находится в комнате i»: i = 1, 2;

– y_i – «тигр сидит в комнате i»: i = 1, 2.

2) Формулируем сложные высказывания, соответствующие условию задачи:

$$f_1 = x_1\ \bar{x}_2\ \bar{y}_1\, y_2, \qquad f_2 = (x_1\ \bar{x}_2 \vee\ \bar{x}_1\, x_2)(y_1\ \bar{y}_2 \vee\ \bar{y}_1\, y_2),$$

$$f_0 = x_1\, x_2\ \bar{y}_1\ \bar{y}_2 \vee\ \bar{x}_1\ \bar{x}_2\, y_1\, y_2 \vee x_1\ \bar{x}_2\ \bar{y}_1\, y_2 \vee\ \bar{x}_1\, x_2\, y_1\ \bar{y}_2.$$

Получаем систему уравнений: $f_0 = 1;$

$$f_1\ \bar{f}_2 \vee\ \bar{f}_1\, f_2 = 1.$$

3) Составляем уравнение: $(f_1\ \bar{f}_2 \vee\ \bar{f}_1\, f_2)\, f_0 = 1.$

4) Приводим левую часть характеристического уравнения к ДНФ. Для выполнения операций над булевыми функциями используем карты Карно (рис. 4.1 –4.2):

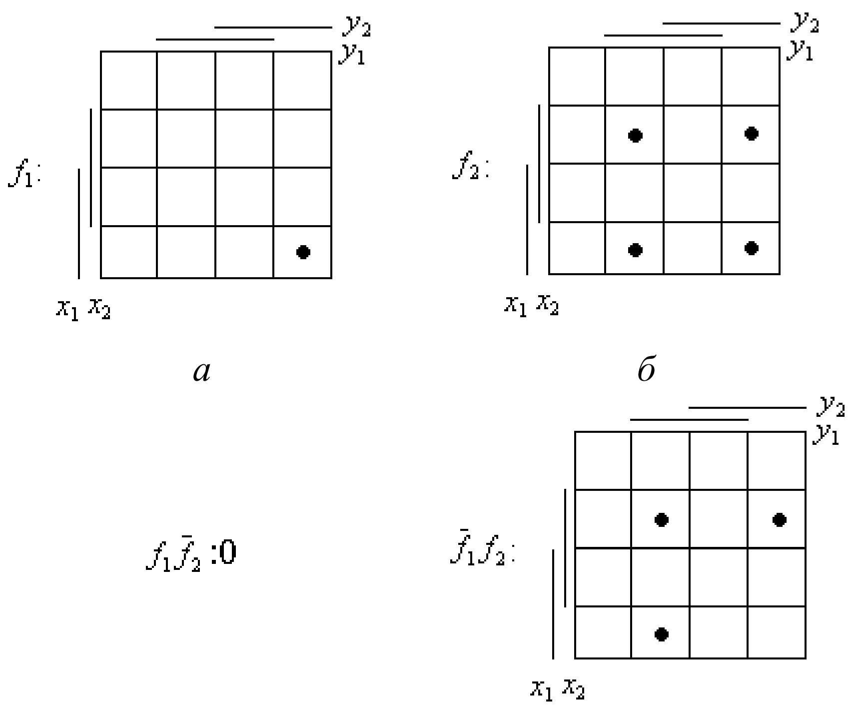

Рис. 4.1. Задание булевых функций с помощью карт Карно:
а – функции f_1; *б* – функции f_2; *в* – функции f_0; *г* – функции $f_1\bar{f}_2$; *д* – функции $\bar{f}_1 f_2$

Из последней матрицы видно, что ДНФ содержит только одно слагаемое.

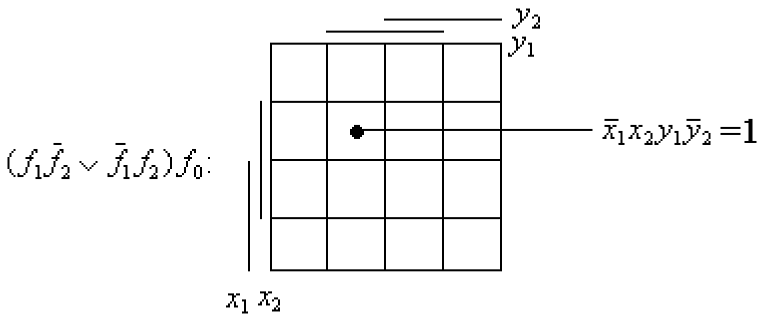

Рис. 4.2. Решение задачи с помощью карты Карно

Решением уравнения $\bar{x}_1 x_2 y_1 \bar{y}_2 = 1$ является набор 0110, т. е. принцесса находится в комнате 2, а тигр в комнате 1.