МОДУЛЬ 2

ТЕМА 6 Булево пространство и булевы функции

6.1 Булев гиперкуб

Булево пространство M можно представить в виде графа, вершины которого соответствуют элементам пространства, а ребра представляют *отношение соседства* между элементами пространства. Два вектора являются соседними, если они отличаются друг от друга значением только одной компоненты. Например, векторы (1 0 0 1) и (1 1 0 1), значения одноименных компонент которых, кроме одной второй компоненты, совпадают, являются соседними. Данный граф, представляющий n-мерное булево пространство, имеет 2^n вершин и $n2^{n-1}$ ребер. Он называется *полным булевым графом*, или *n-мерным гиперкубом*. Рассмотрим построение такого гиперкуба для различных значений размерности пространства.

Одномерный гиперкуб состоит из двух вершин, связанных ребром. Одной из этих вершин приписывается константа 0, другой – константа 1, являющиеся кодами данных вершин. Чтобы получить двумерный гиперкуб, необходимо продублировать одномерный гиперкуб и каждую вершину исходного гиперкуба соединить ребром с ее дублем. Коды вершин построенного двумерного гиперкуба получаются добавлением нулей справа к кодам вершин исходного гиперкуба и единиц – к кодам дублей вершин. Аналогично получаются трехмерный гиперкуб, четырехмерный гиперкуб и т. д.

Сформулируем общее правило увеличения размерности гиперкуба: для перехода от m-мерного гиперкуба к $(m + 1)$-мерному необходимо исходный m-мерный гиперкуб продублировать и каждую вершину исходного гиперкуба соединить ребром с ее дублем. В полученном гиперкубе к кодам вершин исходного m-мерного гиперкуба добавляются справа нули, а к кодам их дублей – единицы.

Последовательность гиперкубов от одномерного до четырехмерного представлена на рис. 6.1.

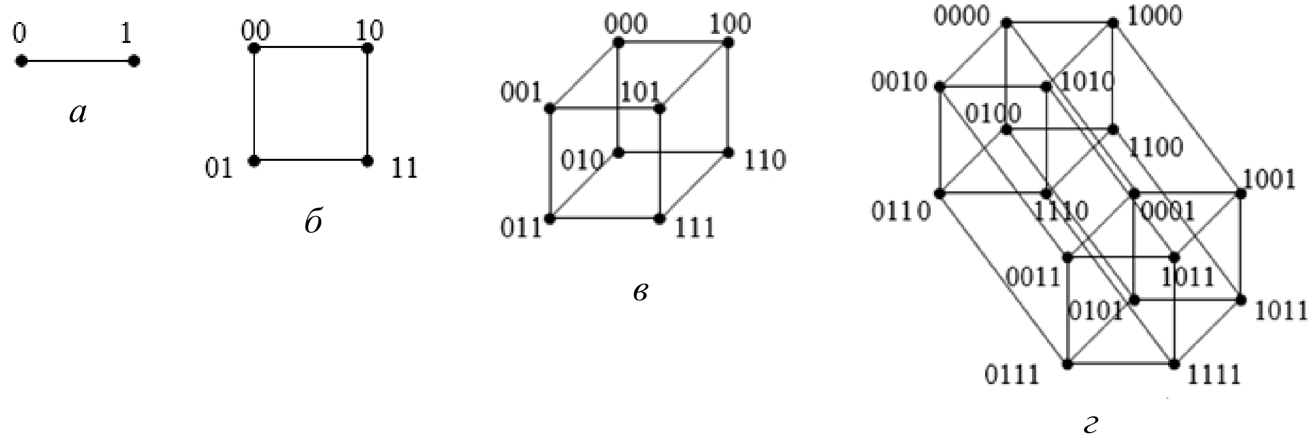


Рис. 6.1. Графическое представление булева пространства:
а – одномерное; *б* – двумерное; *в* – трехмерное; *г* – четырехмерное

В гиперкубе выделяются гиперграни, которые являются порожденными подграфами, представляющими собой гиперкубы меньшей размерности, чем рассматриваемый гиперкуб. Это может быть отдельное ребро, двумерная грань, трехмерный куб и т. п. Подграф, представляющий гипергрань, порождается множеством вершин, составляющих интервал булева пространства.

6.2 Представление булевых функций на гиперкубе

Любой интервал булева пространства является характеристическим множеством функции, выражаемой в алгебраической форме одной элементарной конъюнкцией. Например, конъюнкции $x_1 \bar{x}_3 x_4$ соответствует интервал четырехмерного пространства, представляемый троичным вектором (1 – 0 1). Интервалу приписывается ранг той конъюнкции, которую он представляет.

На гиперкубе булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задается выделением вершин, представляющих элементы ее характеристического множества M_f^1. Например, задание функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$ может быть показано светлыми кружками, как на рис. 6.2.

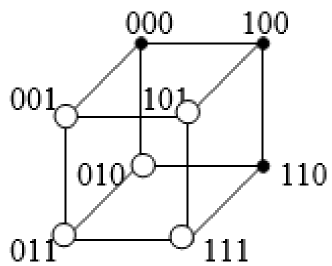


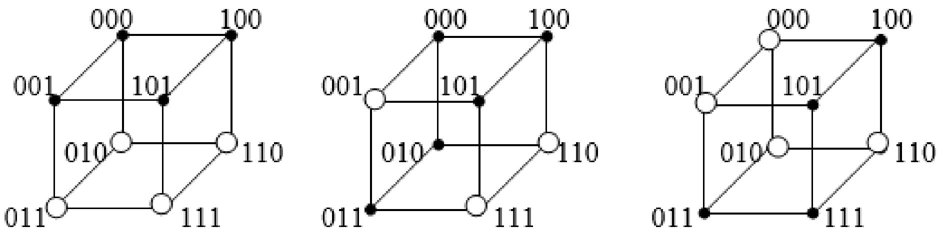
Рис. 6.2. Трехмерный гиперкуб с заданной на нем булевой функцией

В изображенном гиперкубе легко заметить две гиперграни, составляющие множество M_f^1. Они представляют интервалы, задаваемые троичными векторами (– – 1) и (0 1 –), которые являются характеристическими множествами элементарных конъюнкций x_3 и $\bar{x}_1 x_2$ соответственно. Поэтому рассматриваемую функцию можно задать как $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \vee \bar{x}_1 x_2$. Выполнение простого склеивания над исходной формулой дает тот же результат. Таким образом, графическое представление булевой функции дает возможность непосредственно получить ее задание в виде компактной формулы.

На рис. 6.3, *а* видно, что ребра, представляемые векторами (0 1 –) и (1 1 –), образуют гипергрань более высокой размерности, представляемую вектором (– 1 –). Это соответствует простому склеиванию: $\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x = x_2$.

На рис. 6.3, *б* видно, что интервал, соответствующий конъюнкции $\bar{x}_1 x_2$, поглощает элемент булева пространства, соответствующий конъюнкции $x_1 x_2 \bar{x}_3$. Тем самым демонстрируется простое поглощение, выражаемое формулой $x_1 x_2 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 = x_1 x_2$.

Рис. 6.3, *в* демонстрирует формулу обобщенного склеивания: $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3$. Продукт обобщенного склеивания (0 – 0) поглощается совокупностью интервалов (0 0 –) и (– 1 0).



а *б* *в*

Рис. 6.3. Графическое представление некоторых формул булевой алгебры: *а* – простое склеивание; *б* – простое поглощение; *в* – обобщенное склеивание

6.3 Развертка гиперкуба на плоскости. Карта Карно

Как видно из рис. 6.1, с увеличением размерности булева пространства его графическое представление в виде гиперкуба быстро становится трудным для восприятия. Более удобным является развертка гиперкуба на плоскости. Пример такой развертки трехмерного гиперкуба, которая получена удалением двух ребер и расположением верхних и нижних ребер в две параллельных линии, показан на рис. 6.4. На этом же рисунке представлена функция $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$.

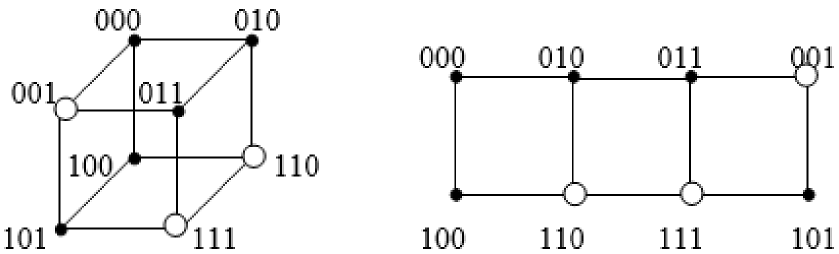


Рис. 6.4. Трехмерный гиперкуб и его развертка на плоскости

Еще более удобной формой представления булева пространства является двумерная таблица, которую принято называть *картой Карно*. Карта Карно имеет ту же структуру, что и развертка гиперкуба на плоскости. Каждая ее клетка соответствует элементу булева пространства. Булеву функцию можно задать расположением нулей и единиц в клетках в соответствии с теми значениями, которые принимает функция на соответствующих элементах булева пространства. Другим способом задания булевой функции на карте Карно является разметка клеток, соответствующих элементам множества M_f^1. При этом клетки, соответствующие элементам множества M_f^0, остаются пустыми. Оба способа представлены на рис. 6.5, где показан пример задания функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$. Коды строк и столбцов, из которых составляются коды клеток, представлены отрезками прямых. Отрезок вертикальной прямой возле нижней строки показывает, что переменная x_1 в коде этой строки имеет значение 1, а его отсутствие у верхней строки говорит, что в ее коде $x_1 = 0$. Аналогично горизонтальные отрезки показывают значения переменных x_2 и x_3 в кодах столбцов.

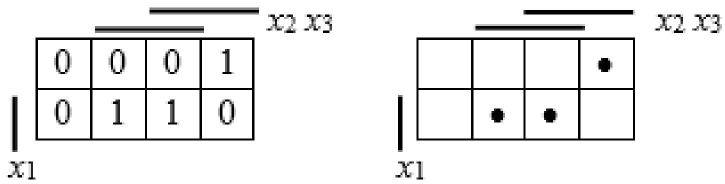


Рис. 6.5. Задание булевой функции с помощью карты Карно

Удобство работы с картами Карно обеспечивается применением *кода Грея* для кодирования строк и столбцов.

Пусть необходимо закодировать в коде Грея последовательность некоторых объектов, число которых равно N. Коды этих объектов, так же как и коды в виде двоичных чисел, являются булевыми векторами. Длина кода n должна быть такой, чтобы выполнялось $N \le 2^n$, или $n = \lceil \log_2 N \rceil$, где $\lceil a \rceil$ – ближайшее к a сверху целое число. Первому объекту присваивается код, состоящий только из нулей, – 0 0 … 0. Далее коды определяются по следующему правилу.

Для получения следующего кода берется последний код и в нем меняется значение той правой компоненты, изменение значения которой приводит к новому коду. Коды соседних в последовательности объектов оказываются, таким образом, отличающимися только значением одной компоненты.

Другой способ построения кода Грея заключается в следующем. Сначала берется последовательность из двух однокомпонентных кодов: (0), (1). Приписав к этой последовательности те же коды в обратном порядке, получим (0), (1), (1), (0). Добавляем слева 0 к элементам исходной последовательности и 1 – к приписанной последовательности. Получим (0 0), (0 1), (1 1), (1 0). К этой последовательности приписываем (1 0), (1 1), (0 1), (0 0) и снова добавляем к исходной части слева 0, а к приписанной части – 1. Получаем (0 0 0), (0 0 1), (0 1 1), (0 1 0), (1 1 0), (1 1 1), (1 0 1), (1 0 0). Эти действия повторяем необходимое число раз в зависимости от количества кодируемых объектов.

Благодаря коду Грея, два соседних элемента булева пространства или два соседних интервала расположены на карте Карно симметрично некоторой оси, т. е. отношение соседства элементов булева пространства представляется отношением симметрии в карте Карно. На рис. 6.6 показана шестимерная карта Карно с осями симметрии. Оси симметрии проходят в местах изменения значений переменных в кодах строк и столбцов. Каждая ось имеет свою *зону симметрии*, ширина которой определяется *рангом* оси.

Оси, связанной с переменной, наиболее часто меняющей свое значение в последовательности кодов строк (или столбцов), придается ранг 1. Если ось связана с переменной, которая меняет свое значение в два раза меньше, ей приписывается ранг 2, если в четыре раза меньше, – ранг 3 и т. д. Ширина оси симметрии ранга k равна 2^k (см. рис. 6.6).

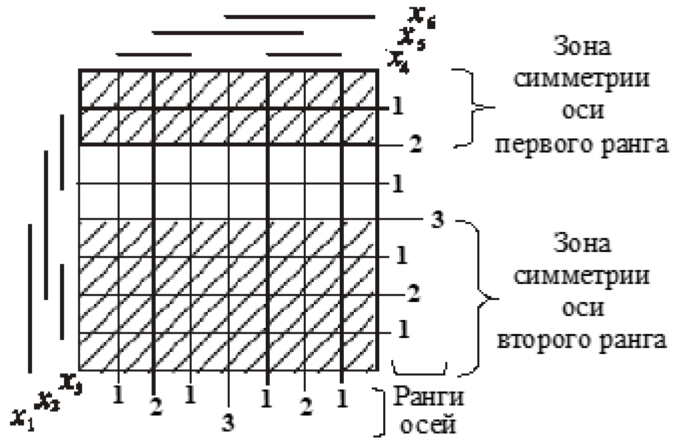


Рис. 6.6. Зоны симметрии карты Карно

По карте Карно легко построить упрощенную ДНФ функции, которая задана с помощью этой карты. Для этого необходимо выделить интервалы, на которых функция принимает значение 1. На карте Карно они представлены единичными областями, симметричными относительно некоторых осей. Каждый интервал должен быть *максимальным*, т. е. не быть собственным подмножеством другого интервала. Элементарная конъюнкция, соответствующая такому интервалу, не содержит переменных, с которыми связаны данные оси. Если на всем интервале некоторая переменная x имеет значение 0, то она берется с отрицанием, если значение 1, – то без отрицания.

Рекомендуется в первую очередь выделять те максимальные интервалы, где имеется элемент, для которого данный максимальный интервал является единственным, его содержащим. Такие интервалы называются *обязательными*, а соответствующие элементы – *определяющими*.

Если пользоваться «жадным» способом, т. е. стараться покрыть одним интервалом как можно большее число элементов, то в полученной ДНФ может оказаться избыточная элементарная конъюнкция, как, например, для функции $f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = x_1\, \bar{x}_2\, x_3 \vee x_1\, x_2\, x_4 \vee \bar{x}_1\, x_2\, x_3 \vee \bar{x}_1\, \bar{x}_2\, x_4$, представленной картой Карно на рис. 6.7. Самый большой интервал, представленный конъюнкцией $x_3\, x_4$, покрывается остальными интервалами, поэтому является избыточным.

Примером получения упрощенной ДНФ является получение ее для функции, представленной картой Карно на рис. 6.8, где определяющие элементы отмечены кружками. ДНФ этой функции имеет вид

$$x_2\, \bar{x}_3\, x_4\, \bar{x}_6 \vee \bar{x}_1\, x_3\, \bar{x}_4\, x_5 \vee x_2\, x_3\, \bar{x}_4\, x_5 \vee x_2\, x_3\, x_5\, x_6 \vee \bar{x}_1\, x_3\, x_4\, x_6 \vee \bar{x}_1\, x_2\, \bar{x}_3\, x_5\, \bar{x}_6.$$

Данная ДНФ является минимальной, поскольку из шести интервалов, покрывающих множество M_f^1, пять являются обязательными.

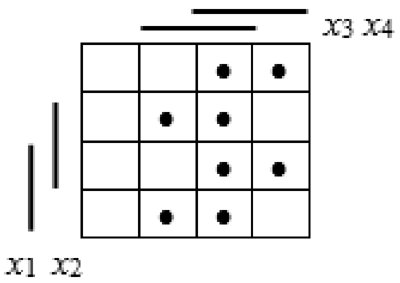


Рис. 6.7. Область M_f^1 с избыточным максимальным интервалом

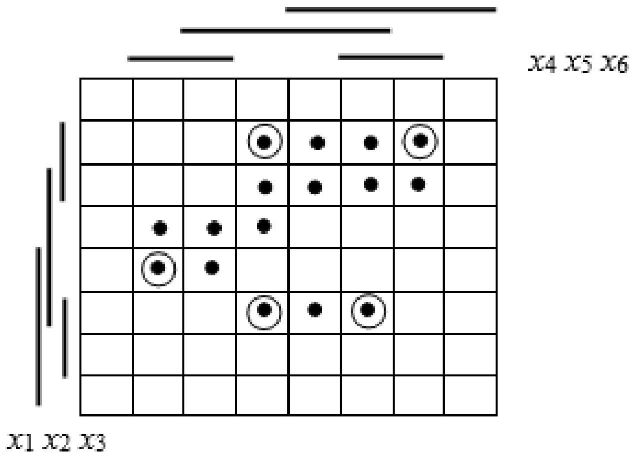


Рис. 6.8. Задание булевой функции с помощью карты Карно