МОДУЛЬ 2

ТЕМА 7 Разложения, функциональная полнота

Система булевых функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ называется *функционально полной*, или просто *полной*, если любая булева функция может быть представлена в виде суперпозиции этих функций. Полную систему булевых функций называют еще *базисом*.

Минимальным базисом называется такой базис $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$, для которого удаление хотя бы одной из функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$ превращает его в неполную систему.

Функции от двух переменных, представляемые булевыми операциями $\overline{}$ (отрицание), $\wedge$ (конъюнкция) и $\vee$ (дизъюнкция), образуют полную систему. Действительно, из теоремы Шеннона следует, что любую булеву функцию можно представить в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ), которая представляет собой суперпозицию отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

Базис $\{\overline{}, \wedge, \vee\}$ не является минимальным. Одну из операций, $\wedge$ или $\vee$, из него можно удалить. Пользуясь правилами де Моргана и законом двойного отрицания, можно дизъюнкцию выразить через отрицание и конъюнкцию, а конъюнкцию – через отрицание и дизъюнкцию:

$$a \vee b = \overline{\overline{a \vee b}} = \overline{\overline{a} \wedge \overline{b}};$$
$$a \wedge b = \overline{\overline{a \wedge b}} = \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}.$$

Система $\{\wedge, \vee\}$ не является полной, так как операцию отрицания нельзя выразить через операции $\wedge$ и $\vee$.

Чтобы убедиться в полноте некоторой системы функций, достаточно через эти функции выразить любую функцию из некоторой известной полной системы. Покажем, что каждая из операций $\mid$ (штрих Шеффера) и $\uparrow$ (стрелка Пирса) составляет полную систему, использовав для этого базис $\{\overline{}, \wedge\}$:

$$\overline{a} = a \mid a;\ a \wedge b = \overline{\overline{a \wedge b}} = \overline{a \mid b} = (a \mid b) \mid (a \mid b);$$
$$\overline{a} = a \uparrow a;\ a \wedge b = \overline{\overline{a \wedge b}} = \overline{\overline{a} \vee \overline{b}} = \overline{a} \uparrow \overline{b} = (a \uparrow a) \uparrow (b \uparrow b).$$

Примером полной системы булевых функций является система, содержащая константу 1, а также функции, выражаемые операцией $\wedge$ и операцией $\oplus$ (сложение по модулю два), что представляет алгебру Жегалкина.

Вопрос о функциональной полноте системы булевых функций имеет практический смысл: набор логических элементов, из которых строятся разнообразные схемы, должен содержать элементы, реализующие все функции из заданного базиса.

Рассмотрим функции $g(y_1, y_2, \ldots, y_k)$, $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, …, $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Будем считать, что функции $f_1, f_2, \ldots, f_k$зависят от одних и тех же аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Этого можно достигнуть, добавив при необходимости к аргументам некоторых функций фиктивные аргументы.

Некоторый класс A логических функций назовем *замкнутым*, если для всяких функций $g(y_1, y_2, \ldots, y_k)$, $f_1, f_2, \ldots, f_k$ из A их суперпозиция

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

содержится в A.

Перечислим пять замкнутых классов логических функций:

1. Класс функций T_0, сохраняющих константу 0, содержит функции, обладающие свойством $f(0, 0, ..., 0) = 0$.

2. Класс функций T_1, сохраняющие константу 1, содержит функции, обладающие свойством $f(1, 1, ..., 1) = 1$.

3. Класс линейных функций L, для которых полином Жегалкина линеен:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus \ldots \oplus c_nx_n, \quad c_i \in \{0, 1\}.$$

Алгоритм построения полинома Жегалкина (совершенной полиномиальной формы Жегалкина) логической функции состоит из следующих шагов:

– построить формулу с использованием связок $\{\wedge, \neg\}$ или построить СДНФ функции;

– заменить всюду $\bar{x}$ на $x \oplus 1$; если построена СДНФ, заменить в ней все операции $\vee$ на операции $\oplus$, так как для ортогональных элементарных конъюнкций имеет место соотношение $x \vee y = x \oplus y$;

– раскрыть скобки, пользуясь законом $(x \oplus y)\, z = x\, z \oplus y\, z$, и привести подобные члены, используя правило алгебры Жегалкина: $x \oplus x = 0$.

4. Класс самодвойственных функций S, для которых выполняется условие $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, т. е. на всех инверсных наборах значения функции различны.

5. Класс монотонных функций M, для которых выполняется условие монотонности $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}')$ при $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{x}'$.

Теорема Поста о функциональной полноте (критерий полноты системы логических функций). Система функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$ является полной тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, L, S, т. е. когда она содержит хотя бы одну функцию, не сохраняющую 0, хотя бы одну функцию, не сохраняющую 1, хотя бы одну несамодвойственную функцию, хотя бы одну немонотонную функцию, хотя бы одну нелинейную функцию.