МОДУЛЬ 2

ТЕМА 8 Минимизация булевых функций (в классе ДНФ)

8.1 Метод Квайна-МакКлasски

Задача минимизации ДНФ заключается в нахождении такой ДНФ для заданной булевой функции, которая содержала бы минимальное число элементарных конъюнкций или литералов. В первом случае результат решения называется *кратчайшей* ДНФ, во втором – *минимальной*.

Для описания метода введем некоторые понятия. Ранее было введено понятие формальной импликации: функция g имплицирует функцию f, т. е. $g \Rightarrow f$, если f имеет значение 1 везде, где это значение имеет g. В этом случае функция g называется *импликантой* функции f. Очевидно, что всякая элементарная конъюнкция, входящая в ДНФ некоторой функции, является импликантой этой функции. Дизъюнкция любого множества импликант является также импликантой.

Простая импликанта – это импликанта в виде элементарной конъюнкции, которая перестает быть импликантой при удалении любого литерала. Заметим, что удаление литералов до пустого множества приводит к конъюнкции, представляющей константу 1. Характеристическим множеством простой импликанты является *максимальный интервал*, т. е. интервал, целиком содержащийся в единичной области M^1 функции f и не являющийся подмножеством другого интервала из M^1.

Дизъюнкция всех простых импликант некоторой булевой функции называется *сокращенной* ДНФ этой функции.

Метод Квайна – МакКласки требует представление заданной булевой функции в виде совершенной ДНФ, т. е. такой ДНФ, каждая конъюнкция которой имеет ранг, равный числу аргументов функции. Процесс минимизации состоит из двух этапов: 1) нахождение множества всех простых импликант заданной функции; 2) выделение из этого множества минимального подмножества, составляющего ДНФ данной функции.

Первый этап выполняется путем применения операции простого склеивания над конъюнкциями. Пусть n – число аргументов заданной функции f. Рассмотрим последовательность множеств $C_0, C_1, \dots, C_k$, где C_0 – множество конъюнкций ранга n, составляющих совершенную ДНФ функции f, C_i – множество конъюнкций ранга $n - i$, полученных путем склеивания конъюнкций из множества C_{i-1}, и C_k – множество конъюнкций ранга $n - k$, где нет ни одной пары соседних конъюнкций и дальнейшее склеивание невозможно. Если склеиваемым конъюнкциям приписывать некоторую метку, то неотмеченные конъюнкции составят множество всех простых импликант.

Выразим этот процесс через операции простого склеивания над булевыми и троичными векторами. Булева функция при этом задана своим характеристическим множеством M^1 – множеством элементов булева пространства, на которых она имеет значение 1. Удобно при этом сгруппировать исходные булевы векторы в подмножества, состоящие из векторов, имеющих одинаковое число единиц, и упорядочить эти подмножества по возрастанию (или убыванию) числа единиц в векторе. Тогда для каждого вектора соседние с ним векторы будут находиться только в соседних подмножествах в полученной последовательности.

В качестве примера рассмотрим булеву функцию, заданную следующей матрицей:

$$\begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Используя для множеств векторов те же обозначения, что использовались для соответствующих конъюнкций, получим последовательность матриц, где склеиваемые строки отмечены знаком «*»:

$$C_0 = \begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array}, \quad C_1 = \begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & - & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & - \\ 0 & - & 1 & 1 \\ - & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & - & 1 \\ - & 1 & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ * \\ * \\ \\ * \\ * \end{array}, \quad C_2 = \begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \\ \begin{bmatrix} - & - & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Сокращенная ДНФ, которая является результатом выполнения первого этапа минимизации, представится следующей матрицей:

$$\begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & - & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & - \\ 1 & 0 & - & 1 \\ - & - & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Второй этап сводится к задаче кратчайшего покрытия. В данном случае множество M^1 надо покрыть минимальным числом интервалов, представленных строками троичной матрицы, задающей сокращенную ДНФ.

Продолжая решать пример, поставим задачу следующим образом. Заданы множество $A = M^1$ и совокупность подмножеств $B_1, B_2, \dots, B_m$ множества A в виде матриц

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{array}
\quad \text{и} \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & - & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & - \\ 1 & 0 & - & 1 \\ - & - & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{array}.$$

Требуется выделить минимум подмножеств B_i, покрывающих все множество A. Перейдя к матричной форме этой задачи, получим следующую матрицу:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{array}.$$

Здесь надо выбрать минимальное количество строк так, чтобы каждый столбец имел единицу хотя бы в одной из них.

Строка B_6 является единственной строкой, которая покрывает столбцы a_6 и a_8. Поэтому ее включаем в решение. Удалив эту строку и покрываемые ею столбцы, получим матрицу

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{array}.$$

Строки B_3 и B_5 удаляются по правилу редукции, как покрываемые строками B_1 и B_4 соответственно. Из оставшихся строк строки B_1 и B_4 покрывают оставшиеся столбцы. Таким образом, искомое кратчайшее покрытие составляют строки B_1, B_4 и B_6, а кратчайшая ДНФ, которая является также минимальной для заданной булевой функции, представляется матрицей

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & - & 0 \\ 1 & 0 & 0 & - \\ - & - & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В алгебраической форме это решение имеет вид $\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_4 \vee x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee x_3\,x_4$.

Иногда есть возможность уменьшить размерность матрицы покрытия, выделив интервалы, входящие в любую безызбыточную ДНФ. Если некоторый элемент булева пространства $m_i \in M^1$ принадлежит лишь одному из максимальных интервалов $U \subseteq M^1$, то очевидно, что любое кратчайшее покрытие множества M^1 максимальными интервалами содержит этот интервал. Элемент m_i в этом случае назовем, как это было при рассмотрении карты Карно, *определяющим элементом*, а интервал U – *обязательным интервалом*.

Чтобы определить, является ли некоторый элемент m_i определяющим, достаточно найти в M^1 все соседние с ним элементы, а затем построить содержащий их *минимальный поглощающий интервал*.

Минимальный поглощающий интервал U для элементов $m_1, m_2, \ldots, m_k$ булева пространства M представляется вектором u, который получается следующим образом: если i-я компонента во всех векторах $m_1, m_2, \ldots, m_k$ имеет значение 0, то вектор u имеет в этой компоненте 0, если значение 1, то и вектор u имеет значение 1. Если i-я компонента имеет различные значения в этих векторах, то i-я компонента вектора u имеет значение «–».

Например, для элементов булева пространства (0 0 1 0 1 0), (0 0 1 0 1 1) и (0 0 0 0 1 1) минимальный поглощающий интервал представляется вектором (0 0 – 0 1 –).

Если все элементы полученного таким образом интервала U принадлежат M^1, то он является максимальным в M^1 и притом обязательным, а m_i является определяющим элементом. В противном случае U не содержится целиком в M^1, а m_i не является определяющим ни для какого интервала.

Чтобы определить, содержится ли интервал U во множестве M^1, достаточно для матрицы, представляющей множество M^1, построить минор, определяемый столбцами, где вектор u имеет значение «–», и строками, не ортогональными вектору u. Число строк в этом миноре не превышает 2^p, где p – число компонент вектора u, имеющих значение «–». Очевидно, интервал U целиком содержится в M^1 тогда и только тогда, когда число строк в этом миноре равно 2^p.

Обратимся к описанному примеру. Элемент (0 0 0 0) не является определяющим. Действительно, минимальный поглощающий интервал для него и соседних с ним элементов (0 0 1 0) и (1 0 0 0) задается троичным вектором (– 0 – 0). Соответствующий минор матрицы, представляющей M^1, имеет вид

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где число строк меньше чем $4 = 2^2$.

Аналогичным образом устанавливается, что элементы (0 0 1 0), (1 0 0 0), (0 0 1 1) и (1 0 0 1) также не являются определяющими. Что касается элемента (0 1 1 1), то для него и соседних с ним элементов (0 0 1 1) и (1 1 1 1) соответствующим троичным вектором является (– – 1 1) и соответствующим минором –

$$\begin{array}{c} x_1\ x_2 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

число строк которого равно 4. Следовательно, элемент (0 1 1 1) является определяющим, а интервал, представляемый вектором (– – 1 1), – обязательным.

Этот интервал включается в решение, и все покрываемые им элементы исключаются из рассмотрения. Очевидно, что если среди них имеется какой-либо определяющий элемент, то он определяет тот же самый интервал. Затем отыскиваются интервалы, содержащие непокрытые элементы. В подразд. 8.2 будет рассмотрен метод Блейка – Порецкого, использующий для получения сокращенной ДНФ операции обобщенного склеивания и простого поглощения. Этот же прием можно использовать для получения интервалов, содержащих непокрытые элементы. Применяется операция обобщенного склеивания векторов, представляющих полученные обязательные интервалы, с векторами, представляющими непокрытые элементы. Далее представлена последовательность матриц, демонстрирующая соответствующий процесс.

$$\begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \\ \begin{bmatrix} - & - & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \\ \begin{bmatrix} - & - & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \\ \begin{bmatrix} - & - & 1 & 1 \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \\ \begin{bmatrix} - & - & 1 & 1 \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - \\ - & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \\ \begin{bmatrix} - & - & 1 & 1 \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - \\ - & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & - \end{bmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \\ \begin{bmatrix} - & - & 1 & 1 \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - \\ - & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & - \\ 1 & 0 & - & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

Последняя матрица представляет сокращенную ДНФ. Далее решается задача покрытия, представляемая матрицей

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{array},
$$

где a_1,a_2,a_3,a_5 – векторы (0 0 0 0), (0 0 1 0), (1 0 0 0), (1 0 0 1) и B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 – интервалы, представляемые векторами (0 0 – 0), (– 0 0 0), (0 0 1 –), (1 0 0 –), (1 0 – 1), соответственно.

Дальнейший ход решения не отличается от предыдущего, и в итоге получается тот же результат: $\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_4 \vee x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee x_3\,x_4$.

8.2 Метод Блейка-Порецкого

Метод Квайна – МакКласки, требующий представление исходной булевой функции в совершенной ДНФ, может оказаться не очень удобным, если булева функция задана в произвольной ДНФ, а ее совершенная ДНФ является довольно громоздкой. Например, совершенная ДНФ функции, заданной произвольной ДНФ $x_1\,x_2\,x_3\,x_5 \vee x_2\,x_3\,x_4\,x_5 \vee \bar{x}_1$, имеет 18 элементарных конъюнкций. В то же время минимальную ДНФ легко получить, применив операции обобщенного склеивания и поглощения:

$$x_1\,x_2\,x_3\,x_5 \vee x_2\,x_3\,x_4\,x_5 \vee \bar{x}_1 = x_1\,x_2\,x_3\,x_5 \vee x_2\,x_3\,x_4\,x_5 \vee \bar{x}_1 \vee x_2\,x_3\,x_5 = \bar{x}_1 \vee x_2\,x_3\,x_5.$$

Метод Блейка – Порецкого основан на применении операций обобщенного склеивания и простого поглощения, определяемых формулами

$$A\,x \vee B\,\bar{x} = A\,x \vee B\,\bar{x} \vee A\,B \quad \text{и} \quad A \vee A\,B = A.$$

Чтобы получить сокращенную ДНФ, необходимо для всех пар смежных элементарных конъюнкций получить продукты обобщенного склеивания и проверить, не поглощаются ли они другими конъюнкциями, входящими в ДНФ, и не поглощают ли они сами некоторые конъюнкции в ДНФ. Поглощаемые конъюнкции удаляются. Вновь получаемые конъюнкции также участвуют в операциях обобщенного склеивания. Процесс заканчивается, когда не удается ввести в ДНФ новую конъюнкцию. В результате описанного процесса получаются все простые импликанты, т. е. получается сокращенная ДНФ.

Если исходная ДНФ задана в виде троичной матрицы, то рекомендуется организовать процесс получения сокращенной ДНФ (троичной матрицы, где каждая строка представляет простую импликанту) следующим образом. Строки исходной матрицы просматриваются сверху вниз, и для очередной строки отыскиваются смежные с ней строки, расположенные сверху от нее. Получаемые продукты обобщенного склеивания добавляются в матрицу снизу. Поглощаемые строки удаляются. Процесс заканчивается на самой нижней строке, когда результаты обобщенного склеивания со смежными с ней строками не дают новых строк для матрицы.

Пусть булева функция задана следующей троичной матрицей:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & - & 0 & 0 \\ 1 & 0 & - & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & - & 1 \\ 0 & - & 1 & 0 & - \\ - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\end{array}.$$

В этой матрице находим следующие пары смежных строк: (2, 3), (1, 4), (3, 4), (2, 5), (4, 5). Выполняя над ними операцию обобщенного склеивания, получим строки

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} & \\
\begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 1 & 1 \\ - & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 & 1 \\ 1 & - & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & - & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 8(2,3) \\ 9(1,4) \\ 10(3,4) \\ 11(2,5) \\ 12(4,5) \end{array}
\end{array},$$

которые не поглощаются заданными строками и сами не поглощают другие строки. Справа приведена нумерация строк, которая продолжает исходную нумерацию, а в скобках приведены номера склеиваемых строк.

Дальнейший поиск дает пары смежных строк (4, 6), (1, 7), (4, 7), (5, 7), (6, 7), для которых получим строки

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} & \\
\begin{bmatrix} - & - & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 & - \\ - & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - & 1 \\ 1 & 1 & - & 0 & - \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 13(4,6) \\ 14(1,7) \\ 15(4,7) \\ 16(5,7) \\ 17(6,7) \end{array}
\end{array}.$$

Строка 13 поглощает строки 6 и 9, а строка 17 – строки 1 и 7. Строка 17 совпадает со строкой 14. Поэтому строки 1, 6, 7, 9 и 17 удаляются. Далее получаются следующие непоглощаемые строки:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} & \\
\begin{bmatrix} - & 1 & 1 & 0 & - \\ - & 1 & 1 & - & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 18(4,14) \\ 19(5,15) \end{array}
\end{array}.$$

Последняя строка поглощает строки 5, 12, 15 и 16. Окончательно получаем следующую матрицу (с естественной нумерацией строк), представляющую сокращенную ДНФ:

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & - & 1 \\ 0 & - & 1 & 0 & - \\ - & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & - & 0 & 1 \\ 1 & - & 1 & 1 & 1 \\ - & - & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 & - \\ - & 1 & 1 & 0 & - \\ - & 1 & 1 & - & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{array}.$$

Второй этап процесса минимизации можно выполнить так же, как это делается в методе Квайна – МакКласки, т. е. свести его к решению задачи покрытия, разбив полученные интервалы на булевы векторы – элементы множества M^1. Комбинаторный поиск при решении задачи покрытия будет значительно сокращен, если удастся выделить *ядро* – множество обязательных интервалов. При существовании ядра иногда удается выделить *антиядро* – множество интервалов, покрываемое ядром. Тогда элементы ядра включаются в решение, элементы антиядра исключаются из рассмотрения и оставшимися интервалами покрываются элементы множества M^1, не покрытые ядром.

Если максимальный интервал не принадлежит ядру, то после его удаления из всей совокупности максимальных интервалов оставшиеся интервалы будут покрывать множество M^1. Таким образом, задача поиска ядра сводится к нахождению избыточных конъюнкций в ДНФ.

В полученной матрице, представляющей сокращенную ДНФ, выделим ядро путем последовательной проверки всех строк на избыточность, как это делалось в подразд. 6.4. Для i-й строки строим минор M_i, образованный строками, не ортогональными i-й строке, и столбцами, где она имеет элемент «–», и проверяем каждый из них на вырожденность. Миноры имеют следующий вид:

$$M_1 = \begin{array}{cc} x_3 & \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 6 \end{matrix} \end{array}, \quad M_2 = \begin{array}{cc} x_4 & \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array}, \quad M_3 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_2 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ - & 0 \\ 1 & - \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{array}, \quad M_4 = \begin{array}{cc} x_1 & \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}, \quad M_5 = \begin{array}{cc} x_3 & \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array},$$

$$M_6 = \begin{array}{cc} x_2 & \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 10 \end{matrix} \end{array}, \quad M_7 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & - \\ 1 & 1 \\ - & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{array}, \quad M_8 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_3 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & - \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{array}, \quad M_9 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & - \\ - & 0 \\ 1 & - \\ - & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{matrix} \end{array}, \quad M_{10} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ - & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{array}.$$

Невырожденными матрицами являются M_7, M_8 и M_{10} с ортогональными их строкам векторами (1 0), (0 –) и (0 1). Следовательно, строки 7, 8 и 10 составляют ядро, и соответствующие интервалы вносятся в решение. Для поиска антиядра можно использовать те же матрицы (кроме M_7, M_8 и M_{10}), удалив из них строки, не принадлежащие ядру. При этом, если матрица оказалась не вырожденной или пустой, это означает, что соответствующий интервал не покрывается ядром. В данном примере антиядро состоит только из одного интервала, представленного строкой 9. Кратчайшее покрытие векторов (1 0 0 1 1), (1 0 1 1 1), (0 0 0 0 1), (0 0 0 1 1) и (0 0 1 0 1) из множества M^1, не покрытых ядром, составляют строки 1, 2 и 3. Минимальная ДНФ представляется матрицей

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & - & 1 \\ 0 & - & 1 & 0 & - \\ - & - & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 & - \\ - & 1 & 1 & - & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{matrix} \end{array},$$

где сохранена нумерация строк матрицы, представляющей сокращенную ДНФ.