

МОДУЛЬ 3

ТЕМА 10 Графы: изоморфизм, циклы, разрезы

10.1 Свободные деревья. Основные свойства

Два графа называются изоморфными тогда и только тогда, когда имеется взаимно однозначное соответствие между их вершинами и ребрами при сохранении отношения инцидентности.

Инварианты графа – характеристики графа, которые не меняются при изоморфных преобразованиях графа.

Граф без циклов называется ациклическим или лесом. Связный ациклический граф называется (свободным) деревом. Таким образом, компонентами связности леса являются деревья.

В связном графе выполняется неравенство $r \geq n-1$. Граф, в котором $r=n-1$, называется древовидным. В ациклическом графе количество циклов $z(G)=0$. Пусть u, v – несмежные вершины графа G , $x=(u, v) \in E$. Если граф $G+x$ имеет только один простой цикл $z(G+x)=1$, то граф субциклический.

На рисунке показаны диаграммы всех различных деревьев с 5 вершинами



Два из четырех свойств – связность, ацикличность, древовидность и субцикличность – характеризуют граф как дерево.

Следующие свойства графов эквивалентны:

1. $G=(V, E)$ – дерево (т.е. связный граф без циклов);
2. любые две вершины G соединены единственной простой цепью;
3. G - граф без циклов, у которого $|E|=|V|-1$ (т.е. ациклический и древовидный);
4. G - связный граф, у которого $|E|=|V|-1$ (т.е. связный и древовидный);
5. G - связный граф, но при удалении любого ребра он становится несвязным (т.е. связный и любое ребро является мостом);
6. G - граф без циклов, но при добавлении любого ребра в нем появляется ровно один (с точностью до задания начальной вершины и направления обхода) простой цикл (ациклический и субциклический).

Ориентированным деревом называется орграф со следующими свойствами:

- существует единственный узел, полустепень захода которого равна 0. Он называется корнем дерева

- полустепень захода всех остальных узлов равна 1

- каждый узел достижим из корня.

Ордерено обладает свойствами

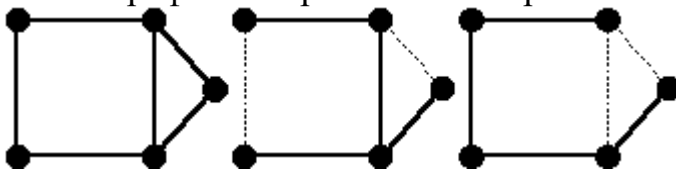
1. $r=n-1$

2. если в ордереве отменить ориентацию ребер, получится свободное дерево
3. в ордереве нет контуров
4. для каждого узла существует единственный путь, ведущий в этот узел из корня
5. подграф, определяемый множеством узлов, достижимых из узла v , является ордеревом с корнем v
6. если в свободном дереве любую вершину назначить корнем, то получится ордерев

Концевая вершина ордерева называется листом. Путь из корня в лист называется ветвью. Длина наибольшей ветви ордерева называется высотой. Уровень узла ордерева – это расстояние от корня до узла. Узлы одного уровня образуют ярус дерева.

Остовным деревом (остовом) связного графа называется любой его остовный подграф, являющийся деревом.

Общее число остовных деревьев связного графа может быть весьма велико. Так, для полного графа с n вершинами оно равно n^{n-2} .



Граф и два его остовных дерева (удаленные ребра показаны пунктиром).

Для произвольного (возможно, несвязного) графа G **остовное дерево** определяется как любой его остовный подграф, не содержащий циклов и имеющий столько же компонент связности, что и G .

Кратчайшее остовное дерево

Задача: найти кратчайшее остовное дерево взвешенного графа.

Пример прикладной задачи: необходимо проложить линии коммуникаций (дороги, линии связи, электропередач и т.п.) между n заданными "точечными" объектами, при условии, что, во-первых, известны "расстояния" между каждой парой объектов (это может быть геометрическое расстояние или стоимость прокладки коммуникаций между ними), и, во-вторых, объекты могут быть связаны как непосредственно, так и с участием произвольного количества промежуточных объектов.

При допущении, что разветвления возможны только в этих же n объектах, задача сводится к нахождению кратчайшего остовного дерева (SST - shortest spanning tree, или MST - minimal spanning tree) во взвешенном графе, вершины которого соответствуют заданным объектам, а веса ребер равны "расстояниям" между ними. Если каждая пара вершин соединена ребром, то граф является полным и решение существует всегда, в противном случае решение существует тогда и только тогда, когда граф связан (отсутствие ребра между двумя вершинами означает невозможность прямой связи между соответствующими объектами).

Замечание: в случае введения дополнительных точек разветвления, длина кратчайшего дерева, включающего все исходные точки, а также некоторое количество новых, может быть меньше длины кратчайшего дерева, построенного только на исходных точках. Если допустить, что точки разветвления не произвольны, а берутся из некоторого множества, то задачу можно сформулировать так: построить кратчайшее

дерево, покрывающее заданное подмножество вершин взвешенного графа. Данная задача, называемая задачей Штейнера, является чрезвычайно сложной с вычислительной точки зрения и может быть практически решена только при небольшом количестве дополнительных вершин. В то же время, существует эффективный приближенный алгоритм, строящий дерево, длина которого превышает длину кратчайшего дерева не более чем в два раза.

В отличие от задачи Штейнера, задача поиска кратчайшего остовного дерева допускает эффективное решение. Ниже будут рассмотрены два алгоритма решения этой задачи.

Алгоритм Краскала

Вход: связный взвешенный граф $G=(V,E)$, $n=|V|$, $r=|E|$.

Выход: SST - кратчайшее остовное дерево G .

1. $SST' = \langle \text{пустой граф с } n \text{ вершинами} \rangle$;
2. $k=0$;
3. если $|E(SST')|=n-1$, то $SST=SST'$; КОНЕЦ;
4. $k=k+1$;
5. $e = \langle k\text{-ое по возрастанию весов ребро графа } G \rangle$;
6. если добавление e в SST' не приводит к появлению цикла, то добавить его в SST' ;
7. перейти на шаг 3.

Алгоритм Краскала (АК) завершает работу за конечное число шагов и строит остовное дерево графа, т.к. он является частным случаем следующего алгоритма построения остовного дерева графа (без весов).

Алгоритм построения остовного дерева графа (алгоритм ST)

Вход: связный граф $G=(V,E)$, $n=|V|$, $r=|E|$.

Выход: ST - остовное дерево графа G .

1. Занумеровать произвольным образом ребра графа G ;
2. $ST' = \langle \text{пустой граф с } n \text{ вершинами} \rangle$;
3. $k=0$;
4. если $|E(ST')|=n-1$, то $ST=ST'$; КОНЕЦ;
5. $k=k+1$;
6. $e = \langle k\text{-ое ребро графа } G \rangle$;
7. если добавление e в ST' не приводит к появлению цикла, то добавить его в ST' ;
8. перейти на шаг 4.

10.2 Цикломатическое число и фундаментальные циклы

Цикл может входить только в одну компоненту связности графа. Цикл – множество ребер. Разрез связного графа – это множество ребер, удаление которых делает граф несвязным. Простой разрез – это минимальный разрез, т.е. такой, никакое собственное подмножество которого разрезом не является. Между циклами и разрезами существует двойственность. Следовательно, разрезы называют коциклами. Чем больше в графе циклов, тем труднее его разрезать. В дереве, наоборот, каждое ребро является

разрезом. Максимальное независимое множество циклов - это фундаментальная система циклов. Циклы фундаментальной системы называются фундаментальными, а количество циклов в данной фундаментальной системе – циклическим рангом (цикломатическим числом). Максимальное независимое множество коциклов (разрезов) – фундаментальная система разрезов. Коциклы фундаментальной системы называются фундаментальными, а количество коциклов в данной фундаментальной системе – коциклическим рангом (коцикломатическим числом).

Цикломатическим числом графа $G=(V,E)$ с k связными компонентами называется число $\lambda(G)=|E|-|V|+k$.

Фундаментальным циклом графа $G=(V,E)$ с остовным деревом $T=(V,E')$ называется простой цикл, получаемый в результате добавления в T одного из ребер G , не принадлежащего E' .

Утверждение 1. Количество фундаментальных циклов графа $G=(V,E)$ при любом фиксированном остовном дереве $T=(V,E')$ равно цикломатическому числу G .

Коцикломатическим числом графа $G=(V,E)$ с называется число $\lambda^*(G)=|V|-1$.

Кодерево – такой подграф, количество ребер в котором равно $E \setminus E'$. Кодерево не является деревом. Ребра кодерева – хорды.