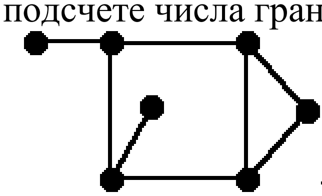
МОДУЛЬ 3

ТЕМА 12 Графы: раскраска и планарность

12.1 Планарные графы

Плоский граф – граф, который укладывается на плоскости так, что никакие два его ребра не пересекаются нигде, кроме как в инцидентной им обоим вершине. Граф, изоморфный плоскому, называется планарным. Любой граф, содержащий в качестве подграфа непланарный граф, является непланарным.

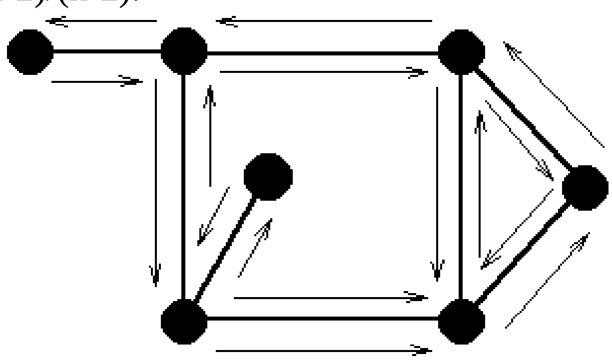
Количество граней можно найти для плоского связного графа. Грань – область плоскости, ограниченная ребрами и не содержащая внутри себя ни вершин, ни ребер. При подсчете числа граней плоского графа учитывается и внешняя грань.



- 7 вершин, 8 ребер, 3 грани

Формула Эйлера. Для любой геометрической реализации графа G=(V,E) на плоскости верно: $n - r + f = 2$, где f - число граней (без доказательства).

Теорема 2. Если в связном планарном графе нет циклов длины меньше k и k=3, то $r \leq k(n-2)/(k-2)$.



- 8 ребер, 3 грани, 3+6+7=16 сторон

Следствие 1 теоремы 2: для любого связного планарного графа без петель и кратных ребер выполняется неравенство: $r \leq 3(n-2)$.

Теорема 3. Граф K_5 не планарен.

Теорема 4. Граф K_{33} не планарен.

Теорема Понтрягина-Куратовского (критерий планарности графов). Граф G планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных (стягиваемых) к K_5 или K_{33}. В любом простом планарном графе существует вершина, степень которой не больше пяти.

Для плоского несвязного графа с n вершинами, r ребрами и k компонентами связности имеет место соотношение $n - r + f = k + 1$.

Назовем *толщиной графа* t(G) наименьшее число планарных графов, наложение которых дает граф G. Толщина графа является мерой его непланарности, в частности, толщина графов K_5 и $K_{3,3}$ равна 2, а толщина планарного графа равна 1.

Используя формулу Эйлера, нетрудно получить нижнюю оценку для толщины графа G с $n \geq 3$:

$$t(G) \geq [r/(3n-6)], \qquad t(G) \geq \{(r+3n-7)/(3n-6)\},$$

где символы [u] и {u} обозначают наибольшее целое число, не превосходящее u, и наименьшее целое число, которое не меньше u.

12.2 Постановка задачи о раскраске графа

Раскраской некоторого графа $G = (V, E)$ называется такое разбиение множества вершин V на непересекающиеся подмножества $V_1, V_2, \dots, V_k$, что никакие две вершины из одного, любого, из этих подмножеств не смежны. Считается, что вершины, принадлежащие одному и тому же подмножеству V_i, выкрашены при этом в один и тот же цвет i. Задача состоит в том, чтобы раскрасить вершины графа G в минимальное число цветов. Оно называется *хроматическим числом* графа и обозначается $\gamma(G)$.

Задача раскраски графа имеет много приложений в различных областях человеческой деятельности. К задаче раскраски сводятся составление расписания занятий в учебном заведении, распределение оборудования на предприятии, выбор расцветки проводов в сложных электрических схемах и многие другие практические задачи. Например, при минимизации числа ячеек памяти вычислительной машины для хранения промежуточных результатов в процессе выполнения программы можно построить граф, вершины которого соответствуют промежуточным результатам вычисления и две вершины связаны ребром, если и только если соответствующие величины используются одновременно и не могут храниться в одной и той же ячейке. Хроматическое число данного графа представляет минимум упомянутых ячеек.

Иногда ставится задача раскраски ребер графа $G = (V, E)$, где требуется получить такое разбиение множества ребер E на непересекающиеся подмножества $E_1, E_2, \dots, E_p$, что ни одна пара ребер из одного и того же E_i $(i = 1, 2, \dots, p)$ не имеет общей инцидентной вершины. Данная задача сводится к раскраске вершин. Для этого надо построить *реберный граф* $L(G)$ графа G. Вершины графа $L(G)$ соответствуют ребрам графа G, и две вершины графа $L(G)$ связаны ребром, если и только если соответствующие ребра графа G имеют общую инцидентную вершину в G. Раскраска ребер графа G соответствует раскраске вершин графа $L(G)$.

12.3 Метод раскраски графа

Очевидно, всякое множество одноцветных вершин графа является независимым множеством. Поэтому получить минимальную раскраску можно следующим образом: найти все максимальные независимые множества; получить кратчайшее покрытие множества вершин графа максимальными независимыми множествами; удалить некоторые вершины из элементов полученного покрытия, добившись того, чтобы каждая вершина входила в одно и только в одно из выделенных независимых множеств. Для графов, число независимых множеств которых невелико, этот способ является приемлемым. Однако это число для некоторых графов может оказаться настолько большим, что данный способ вообще не сможет быть реализован. Существует немало методов раскраски, не использующих задачу покрытия и получающих точно минимальное число цветов, но и их применение существенно ограничено размерностью задачи.

Рассмотрим один из методов раскраски графа, который не гарантирует получения минимума цветов, но дает раскраску, близкую к минимальной, а во многих случаях совпадающую с ней.

Процесс раскраски графа $G = (V, E)$ представляет собой последовательность шагов, на каждом из которых выбирается вершина и окрашивается в определенный цвет. Текущая ситуация характеризуется следующими объектами: k – число задействованных цветов; A – множество еще не раскрашенных вершин; $B_1, B_2, \ldots, B_k$ – совокупность подмножеств множества вершин V, такая, что B_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) содержит те и только те вершины из множества A, которые нельзя раскрасить в i-й цвет. Обратим внимание на следующие два случая:

1. Имеется вершина $v \in A$, такая, что $v \in B_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$.
2. Имеется вершина $v \in A$ и цвет i такие, что $v \notin B_i$ и $N(v) \cap A \subseteq B_i$.

В первом случае вершину v надо красить в (k + 1)-й цвет, удалить ее из множества A и из всех множеств B_i, где она была, сформировать множество B_{k+1} и увеличить k на единицу. Если таких вершин несколько, из них выбирается та, для которой множество B_{k+1} имеет максимальную мощность.

Во втором случае вершину v надо красить в i-й цвет, удалить ее из множества A и из всех множеств B_j, где она была.

Во всех остальных случаях из множества A выбираются вершина v и цвет i такие, что $v \notin B_i$ и приращение $\Delta|B_i|$ мощности множества B_i минимально среди всех пар v, B_i ($v \in A$, $i = 1, 2, \ldots, k$). Вершина v удаляется из A и из всех B_j, где она была, и красится в i-й цвет.

Выполнение описанных действий повторяется до тех пор, пока множество A не станет пустым.

В начальной ситуации $A = V$, $k = 0$ и рекомендуется выбирать вершину с максимальной степенью и красить ее в цвет 1, а множество B_1 будет представлять ее окрестность.

Продемонстрируем применение данного метода на примере графа, изображенного на рис. 12.1, представив далее результаты выполнения последовательности шагов.

Шаг 1: $\{v_1\}$; $B_1 = \{v_2, v_6, v_8, v_{10}\}$; $A = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$.

Шаг 2 (первый случай: $v_2 \in B_1$): $\{v_1\}$, $\{v_2\}$; $B_1 = \{v_6, v_8, v_{10}\}$, $B_2 = \{v_4, v_5\}$; $A = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$.

Шаг 3 (второй случай: $N(v_8) = \varnothing$): $\{v_1\}$, $\{v_2, v_8\}$; $B_1 = \{v_6, v_{10}\}$, $B_2 = \{v_4, v_5\}$; $A = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_9, v_{10}\}$.

Шаг 4 (выбор v_7, цвет 1, $\Delta|B_1| = 1$): $\{v_1, v_7\}$, $\{v_2, v_8\}$; $B_1 = \{v_3, v_6, v_{10}\}$, $B_2 = \{v_4, v_5\}$; $A = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_9, v_{10}\}$.

Шаг 5 (выбор v_3, цвет 2, $\Delta|B_2| = 1$): $\{v_1, v_7\}$, $\{v_2, v_3, v_8\}$; $B_1 = \{v_6, v_{10}\}$, $B_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$; $A = \{v_4, v_5, v_6, v_9, v_{10}\}$.

Шаг 6 (первый случай: $v_6 \in B_i$, $i = 1, 2$): $\{v_1, v_7\}$, $\{v_2, v_3, v_8\}$, $\{v_6\}$; $B_1 = \{v_{10}\}$, $B_2 = \{v_4, v_5\}$, $B_3 = \{v_9\}$; $A = \{v_4, v_5, v_9, v_{10}\}$.

Шаг 7 (выбор v_5, цвет 3, $\Delta|B_3| = 1$): $\{v_1, v_7\}$, $\{v_2, v_3, v_8\}$, $\{v_5, v_6\}$; $B_1 = \{v_{10}\}$, $B_2 = \{v_4\}$, $B_3 = \{v_4, v_9\}$; $A = \{v_4, v_9, v_{10}\}$.

Шаг 8 (второй случай: $N(v_{10}) \cap A \subseteq B_3$): $\{v_1, v_7\}$, $\{v_2, v_3, v_8\}$, $\{v_5, v_6, v_{10}\}$; $B_1 = \varnothing$, $B_2 = \{v_4\}$, $B_3 = \{v_4, v_9\}$; $A = \{v_4, v_9\}$.

Шаг 9 (выбор v_4, цвет 1, $\Delta|B_1| = 1$): $\{v_1, v_4, v_7\}$, $\{v_2, v_3, v_8\}$, $\{v_5, v_6, v_{10}\}$; $B_1 = \{v_9\}$, $B_2 = \varnothing$, $B_3 = \{v_9\}$; $A = \{v_9\}$.

Шаг 10: завершение работы с результатом $\{v_1, v_4, v_7\}$, $\{v_2, v_3, v_8, v_9\}$, $\{v_5, v_6, v_{10}\}$.

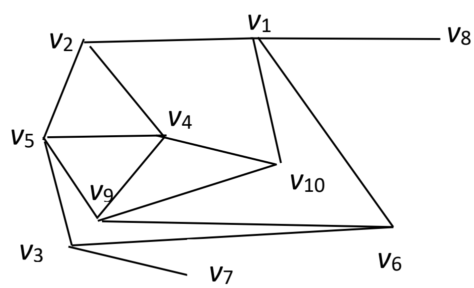


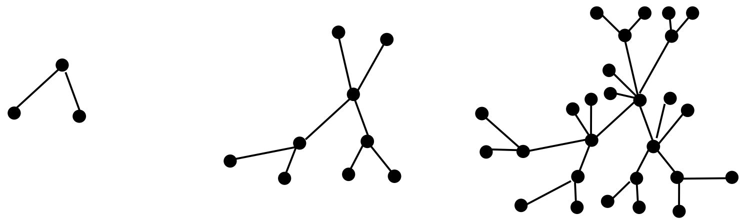
Рис. 12.1. Раскрашиваемый граф

Полученная раскраска для данного графа является минимальной, так как хроматическое число графа $\gamma(G)$ не может быть меньше числа вершин его наибольшей клики, а на рис. 12.1 видны клики, состоящие из трех вершин.

Описанный способ дает возможность иногда делать заключение о том, что полученная раскраска является минимальной. Назовем шаги, выполненные в первом и втором случаях, «хорошими», а в остальных случаях – «сомнительными». Если в процессе раскраски выполнялись только хорошие шаги, то, очевидно, полученная раскраска является минимальной. Если приходилось выполнять сомнительные шаги, то полученная раскраска может оказаться не минимальной, но по соотношению между количествами хороших и сомнительных шагов можно судить о близости полученной раскраски к минимальной.

Иногда можно получить раскраску графа, минимальную или близкую к минимальной, с помощью так называемого «*жадного*» алгоритма, где на каждом шаге в текущий цвет раскрашивается как можно больше вершин. Желательно для этого брать наибольшее независимое множество. Раскрашенные вершины удаляются из графа, вводится новый цвет, в него раскрашивается опять как можно больше вершин и так далее до тех пор, пока множество вершин графа не станет пустым. Однако есть пример графа, для которого число цветов, полученное при такой раскраске, может отличаться от минимального на сколь угодно большую величину.

Рассмотрим неограниченную последовательность деревьев $T_1, T_2, \ldots, T_i, \ldots$, начало которой изображено на рис. 12.2. Дерево T_1 состоит из трех вершин и двух ребер. Дерево T_i получается из T_{i-1} присоединением к каждой вершине T_{i-1} двух смежных с ней вершин. Наибольшее независимое множество дерева T_i составляют все вершины, не принадлежащие T_{i-1}. Число цветов, получаемое при раскраске дерева T_i данным способом, равно $i + 1$, хотя ясно, что всякое дерево можно раскрасить в два цвета.



T_1 T_2 T_3

Рис. 12.2. Деревья, раскрашиваемые «жадным» алгоритмом

12.4 Бихроматические графы

Граф G называется k-*хроматическим*, если $\chi(G) = k$. Очевидно, пустые и только пустые графы являются 1-хроматическими. Особый класс составляют *бихроматические графы*, т. е. такие, у которых $\chi(G) = 2$.

Т е о р е м а К ё н и г а. Непустой граф является бихроматическим тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

Допустим, что $G = (V, E)$ – связный бихроматический граф. Это не нарушает общности, так как в случае несвязного графа последующие рассуждения можно провести для каждой его компоненты в отдельности. Пусть V^1 и V^2 – множества вершин графа G, раскрашенных соответственно в цвета 1 и 2. Всякое ребро соединяет вершину из V^1 с вершиной из V^2. Следовательно, всякая цепь, начинающаяся и оканчивающаяся в одном и том же множестве V^i ($i = 1, 2$), имеет четную длину. Пусть теперь G – связный граф, не имеющий циклов нечетной длины. Возьмем любую вершину v из графа G. Сформируем множество V^1 из вершин, отстоящих от v на четном расстоянии в графе G, и множество V^2 из всех остальных вершин. Ни одна пара вершин из V^2 не связана ребром. Действительно, если имелось бы ребро $v_iv_j \in E$, у которого $v_i \in V^2$ и $v_j \in V^2$, то цикл, составленный из цепи, соединяющей v с v_i, ребра v_iv_j и цепи, соединяющей v_j с v, имел бы нечетную длину, что противоречит условию.

Очевидно, всякий двудольный граф, имеющий хотя бы одно ребро, является бихроматическим, так как любая доля двудольного графа представляет собой независимое множество.

Бихроматичность графа легко установить, используя способ последовательной раскраски. Для этого произвольно выбирается вершина v и красится в цвет 1. Вершины ее окрестности $N(v)$ красятся в цвет 2, неокрашенные вершины из окрестностей вершин, принадлежащих $N(v)$, красятся в цвет 1 и т. д. В результате либо граф раскрашивается в два цвета, либо на каком-то шаге смежные вершины оказываются окрашенными в один и тот же цвет. Это говорит о том, что граф не является бихроматическим.