

Тема 2. Отношения

Отношения - один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.

Унарные (одноместные) отношения отражают наличие какого-то определенного признака R (свойства и т.п.) у элементов множества M (например, "быть белым" на множестве шаров в урне), т.е. $a \in R$ и $R \subseteq M$.

Двухместным, или бинарным, отношением R называется подмножество пар $(a, b) \in R$ прямого произведения $M_1 \times M_2$, т.е. $R \subseteq M_1 \times M_2$. При этом множество M_1 называют областью определения отношения R , множество M_2 - областью значений.

Пусть $R \subseteq A \times B$ определено в соответствии с изображением на рис. 2.1. Область определения $D(R)$ и область значений $Q(R)$ определяются соответственно: $D(R) = \{a: (a, b) \in R\}$, $Q(R) = \{b: (a, b) \in R\}$.

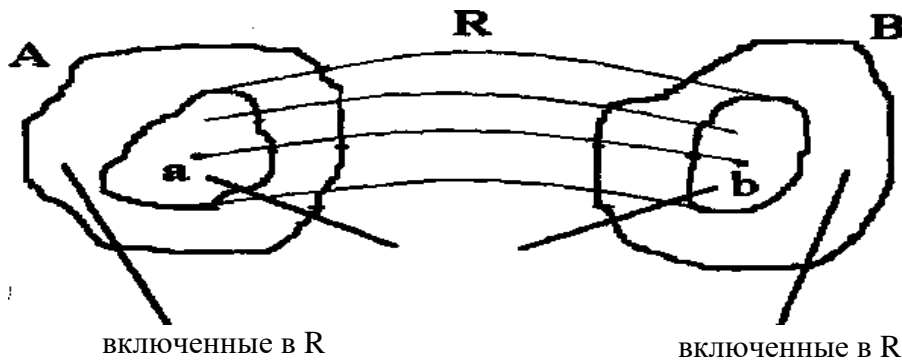


Рис. 2.1.

Отношения, определенные на конечных множествах, обычно задаются:

1. Списком (перечислением) пар, для которых это отношение выполняется. Например, $R = \{(a, b), (a, c), (b, d)\}$.

2. Матрицей - бинарному отношению $R \subseteq M \times M$, где $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, соответствует квадратная матрица порядка n , в которой элемент c_{ij} , стоящий на пересечении i -и строки и j -го столбца, равен 1, если между a_i и a_j имеет место отношение R , или 0, если оно отсутствует.

Пусть R - отношение на множестве M , $R \subseteq M \times M$. Тогда:

1) R - рефлексивно, если имеет место $a R a$ для любого $a \in M$ (например, отношение "жить в одном городе") ($\forall a \ a R a$);

2) R - антирефлексивно, если ни для какого $a \in M$ не выполняется $a R a$ (например, отношение "быть сыном") ($\forall a \ \bar{a R a}$);

3) R - симметрично, если $a R b$ влечет $b R a$ (например, отношение "работать на одной фирме") ($\forall a, b (a R b \rightarrow b R a)$);

4) R - антисимметрично, если $a R b$ и $b R a$, то $a = b$, т.е. ни для каких различающихся a и b ($a \neq b$) не выполняется одновременно $a R b$ и $b R a$ (например, отношения "быть сыном", "быть начальником") $(\forall a, b) ((a \rho b \text{ и } b \rho a) \rightarrow (a = b))$;

5) R - транзитивно, если $a R b$ и $b R c$ влекут $a R c$ (например, отношения "быть моложе", "быть братом") $(\forall a, b, c) ((a \rho b \text{ и } b \rho c) \rightarrow (a \rho c))$.

Отношением эквивалентности (или просто эквивалентностью) называют бинарное отношение на множестве, если оно рефлексивно, симметрично, транзитивно. Например, отношение "жить в одном городе" на множестве людей.

Отношением нестрогого порядка (или нестрогим порядком) называют бинарное отношение на множестве, если оно рефлексивно, антисимметрично, транзитивно, и отношением строго порядка (строгим порядком), если оно антирефлексивно, антисимметрично, транзитивно.

Так как отношения на M задаются подмножествами, $R \subseteq M_1 \times M_2$ (или $R \subseteq M_2$, если $M_1 = M_2 = M$), для них определимы те же операции, что и над множествами:

1. Объединение $R_1 \cup R_2 = \{(a, b): (a, b) \in R_1 \text{ или } (a, b) \in R_2\}$.
2. Пересечение $R_1 \cap R_2 = \{(a, b): (a, b) \in R_1 \text{ и } (a, b) \in R_2\}$.
3. Разность $R_1 \setminus R_2 = \{(a, b): (a, b) \in R_1 \text{ и } (a, b) \notin R_2\}$.
4. Дополнение $\bar{R} = U \setminus R$, где $U = M_1 \times M_2$ (или $U = M^2$).
5. Обратное отношение $a R^{-1} b$ тогда и только тогда, когда $b R a: R^{-1} = \{(a, b): (b, a) \in R\}$. Например, если R - "быть моложе", то R^{-1} - "быть старше", если R - "быть сыном", то R^{-1} - "быть отцом (или матерью)".

6. Составное отношение (композиция) $R_1 \circ R_2$. Пусть заданы множества M_1, M_2, M_3 и отношения $R_1 \subseteq M_1 \times M_2$ и $R_2 \subseteq M_2 \times M_3$. Составное отношение действует из M_1 в M_3 посредством R_1 а затем из M_2 в M_3 посредством R_2 , т.е. $(a, b) \in R_1 \circ R_2$, если существует такое $c \in M_2$ что $(a, c) \in R_1$ и $(c, b) \in R_2$.

В частности, если отношение R определено на множестве M , $R \subseteq M^2$, то составное отношение $R \circ R = \{(a, b): (a, c), (c, b) \in R\}$. Например, если R - "быть сыном", то $R \circ R$ - "быть внуком".

7. Транзитивное замыкание R° состоит из таких и только таких пар элементов a, b из M , т.е. $(a, b) \in R^\circ$, для которых в M существует цепочка из $(k+2)$ элементов M , $k \geq 0$: $a, c_1, c_2, \dots, c_k, b$, между соседними элементами которой выполняется R : $a R c_1, c_1 R c_2, \dots, c_k R b$, т.е.: $R^\circ = \{(a, b): (a, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_k, b) \in R\}$ (определение I).

Унарная операция транзитивного замыкания R° может быть также определена как бесконечное объединение: $R^\circ = R \cup R^{(2)} \cup R^{(3)} \cup \dots \cup R^{(n)} \cup \dots$ (определение II).

Например, для отношения R - "быть сыном" составное отношение (композиция) $R \circ R = R^{(2)}$ - "быть внуком", $R \circ R \circ R = R^{(3)}$ - "быть правнуком" и т.д. Тогда объединение всех этих отношений есть транзитивное замыкание R° - "быть прямым потомком".

Если отношение R транзитивно, то $R^\circ = R$. Например, транзитивное замыкание отношения R - "быть больше" совпадает с этим отношением, т.е. $R^\circ = R$.

8. Рефлексивное замыкание R^* . Пусть тождественное отношение $E = \{(a, a) : a \in M\}$. Тогда $R^* = R \cup E$. Если R транзитивно и рефлексивно, то $R^* = R$.

Занятие 2

Прямое (декартово) произведение множеств. Бинарные отношения. Способы их задания. Теоретико-множественные тождества алгебры отношений

Вопросы к занятию:

1. Прямое произведение двух множеств.
2. Прямое произведение нескольких множеств.
3. Бинарные и n -арные отношения.
4. Операции над отношениями. Обратное и диагональное отношения.

Примеры решения задач

Задача 1. Составить декартово произведение множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{a, b, c\}$. Доказать, что $A \times B \neq B \times A$. Доказать, что $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$.

Решение.

Составим $A \times B$, соединяя в пару каждый элемент из A с каждым элементом из B : $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$.

Аналогично найдём

$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$.

Очевидно, что $A \times B \neq B \times A$.

Докажем равенство $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$, доказывая два встречных включения.

Пусть $v = (x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A)$. Тогда $x \in A, y \in B$ и $x \in B, y \in A$. Следовательно, $x \in A \cap B$. Поэтому $v = (x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap B) = (A \cap B)^2$.

Пусть $v = (x, y) \in (A \cap B)^2$. Тогда $(x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \cap B, y \in A \cap B \Rightarrow (x, y) \in A \times B$ и $(x, y) \in B \times A \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A)$

В случае операции над декартовыми произведениями множеств можно пользоваться прямоугольными диаграммами, считая все встречающиеся множества подмножествами множества действительных чисел.

Построив диаграммы декартова произведения $A \times B$ и декартова произведения $B \times A$, видим, что фигуры на графиках совпадают только при $A = B$, т.е. $(A \times B = B \times A) \Leftrightarrow (A = B)$ (см. рис. 2.2).

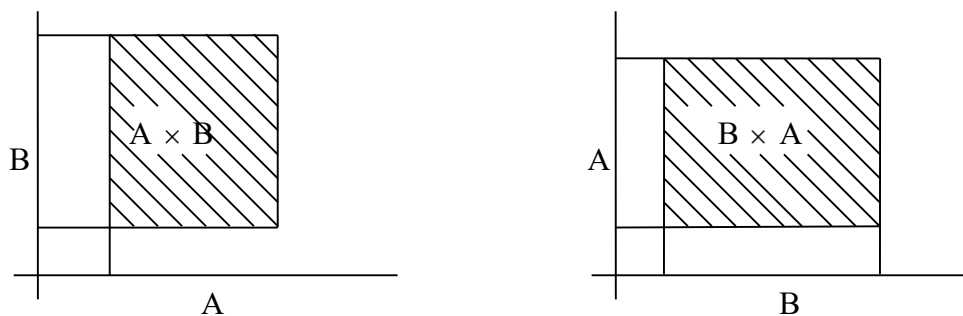


Рис.2.2.

Задача 2. На координатной плоскости построить следующие множества:

- а) $[1, 2] \times [1, 2]$,
- б) $\mathbb{R} \times [-1, 1]$.

Решение.

а) Первое множество помещаем на оси Ox , второе на оси Oy . Очевидно, что множество всех пар, т.е. декартово произведение, изображается точками заштрихованного квадрата, но без верхней и левой сторон (рис. 2.3а).

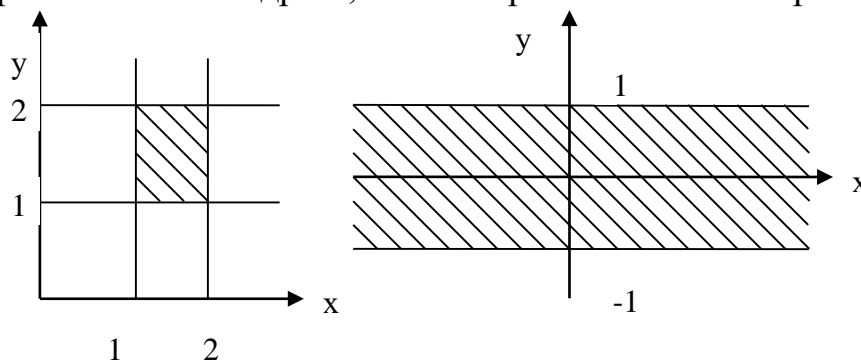


Рис.2.3а), б)

б) Первым элементом пары может быть любое число из \mathbb{R} – множества всех действительных чисел, вторым элементом пары – любое число из отрезка $[-1, +1]$. Поэтому геометрическим изображением произведения $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ будет бесконечная полоса между прямыми $y = -1$ и $y = 1$, включая их (рис. 2.3б).

Задача 3. Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Задать в явном виде (списком) и матрицей отношение $R \subseteq M * M$, если R означает - "быть строго меньше".

Решение.

Отношение R как множество содержит все пары элементов a, b из M такие, что $a < b$: $R = \{(a, b): a, b \in M; a < b\}$.

Тогда $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$. Матрица отношения приведена на рис. 2.4.

R	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

Рис.2.4.

Задача 4. Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Составить матрицы отношения $R_1, R_2, R_3 \subseteq M \times M$, если:

- R_1 - "быть делителем";
- R_2 - "иметь общий делитель, отличный от единицы";
- R_3 - "иметь один и тот же остаток от деления на 3".

Решение.

а) $R_1 = \{(a, b): a, b \in M; a - \text{делитель } b\}$ и выполняется для пар $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$. Эти пары $(a, b) \in R_1$, определяют наличие единиц в матрице отношения $R_1 \subseteq M \times M$ на пересечении строки элемента a и столбца элемента b ; $a, b \in M$ (рис. 2.5а);

б) $R_2 = \{(a, b): a, b \in M; a \text{ и } b \text{ имеют общий делитель, } c \neq 1\}$. Матрица отношения R_2 представлена на рис. 2.5б;

в) $R_3 = \{(a, b): a, b \in M; a, b \text{ имеют один и тот же остаток от деления на } 3\}$. Матрица отношения R_3 приведена на рис. 2.5в.

R₁	1	2	3	4	5	6	R₂	1	2	3	4	5	6	R₃	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	1	0	1	2	0	1	0	1	0	1	2	0	1	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1	3	0	0	1	0	0	1	3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0	4	0	1	0	1	0	1	4	1	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	5	0	0	0	0	1	0	5	0	1	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1	6	0	1	1	1	0	1	6	0	0	1	0	0	1

Рис. 2.5 а), б), в)

Задача 5. Составить матрицы отношений, заданных на системе множеств $\beta(M)$, $M = \{a, b, c\}$:

- R_1 - "пересекаться с" (иметь непустое пересечение);
- R_2 - "являться строгим включением".

Решение.

$\beta(M) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$. Матрицы отношений R_1 и R_2 представлены на рис. 2.6.

R_1	\emptyset	{a}	{b}	{c}	{a, b}	{a, c}	{b, c}	{a, b, c}
\emptyset	0	0	0	0	0	0	0	0
{a}	0	1	0	0	1	1	0	1
{b}	0	0	1	0	1	0	1	1
{c}	0	0	0	1	0	1	1	1
{a, b}	0	1	1	0	1	1	1	1
{a, c}	0	1	0	1	1	1	1	1
{b, c}	0	0	1	1	1	1	1	1
{a, b, c}	0	1	1	1	1	1	1	1

R_2	\emptyset	{a}	{b}	{c}	{a, b}	{a, c}	{b, c}	{a, b, c}
\emptyset	0	1	1	1	1	1	1	1
{a}	0	0	0	0	1	1	0	1
{b}	0	0	0	0	1	0	1	1
{c}	0	0	0	0	0	1	1	1
{a, b}	0	0	0	0	0	0	0	1
{a, c}	0	0	0	0	0	0	0	1
{b, c}	0	0	0	0	0	0	0	1
{a, b, c}	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 2.6.

Задача 6. Пусть R - отношение на \mathbb{N} : $R = \{(a, b) : a > b\}$ - "быть больше". Выполнить операции над R .

Решение.

$$R \cup R = R;$$

$$R \cap R = R;$$

$$R \setminus R = \emptyset;$$

$$R^{-1} = \{(a, b) : a < b\} - \text{"быть меньше"};$$

$$\bar{R} = U \setminus R = \{(a, b) : a \leq b\} - \text{"быть не больше"};$$

$$R^{\circ} R = R^{(2)} = \{(a, b) : a - 1 > b\} - \text{"быть больше по крайней мере на 2"};$$

$$R^{\circ} = R \text{ (так как } R \text{ транзитивно)};$$

$$R^* = R^{\circ} \cup E = \{(a, b) : a > b \text{ или } a = b\} = \{(a, b) : a \geq b\} - \text{"быть не меньше"}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Доказать или опровергнуть утверждения
- $(\forall A, B)(A \times B = B \times A)$
 - $(\exists A, B)(A \times B = B \times A)$
 - $(\exists A \forall B)(A \times B = B \times A)$
 - $(\forall B \exists A)(A \times B = B \times A)$
 - $(\forall A, B)((A \subset B) \Rightarrow (A \times B = B \times A))$
 - $(\forall A, B, C)(A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C))$
 - $(\forall A, B, C)(A \times (B \cup C) = (A \times B) \setminus (A \times C))$
 - $(\forall A, B, C)(A \cup (B \times C) = (A \times C) \cup (B \times C))$
 - $(\forall A, B, C)((A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C))$
 - $(\forall A, B, C)((A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C))$
 - $(\forall A, B, C)((A \setminus B) \times C = ((A \times C) \setminus (B \times C))$
2. Докажите, предварительно построив прямоугольные диаграммы,
 $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (B \times D)$.
3. Выполнить условие задачи 5 для отношений:
- а) R3 - "являться нестрогим включением \subseteq ";
 - б) R4 - "быть дополнением к".
4. Пусть $M = \beta(A)$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Найти все элементы (пары) отношения R на M, если R означает:
- а) \subset ; в) "пересекаться с";
 - б) \subseteq ; г) "быть дополнением к".
- Задать R описанием его характеристического свойства.
5. Пусть отношение R задано на $M = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Выписать все элементы R, если:
- а) $R = \{(a, b) : a, b \in M; (a + 1) \text{ - делитель } (a + b)\}$;
 - б) $R = \{(a, b) : a, b \in M; a \text{ - делитель } (a + b), a \neq 1\}$.
6. Пусть на множестве $M = \{1, 2, 3, 4\}$ определено отношение R - "быть больше". Выполнить операции над отношением R; задать полученные в результате операций отношения характеристическим свойством, списком, а также назвать отношения. Сравнить отношения; определить их свойства.

Свойство бинарных отношений. Отношение эквивалентности и порядка. Функциональное отношение. Виды отображений.

Вопросы к занятию:

1. Граф бинарного отношения
2. Свойства бинарных отношений.
3. Отношение эквивалентности и порядка. Фактор-множества.
4. Частные случаи отображения множества во множество.

Примеры решения задач

Задача 1. Отношение $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (1, 1), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$ изобразить графом. Определить, обладает ли это отношение свойствами, перечисленными во втором вопросе. Какими парами следует пополнить это отношение, чтобы оно стало рефлексивным (симметричным, транзитивным, связным). Установить, какие пары следует удалить из отношения, чтобы оно стало антирефлексивным (антисимметричным).

Решение.

Отношение ρ не является ни рефлексивным (для рефлексивности не хватает пар $(2, 2)$ и $(3, 3)$), ни антирефлексивным (для антирефлексивности следует удалить пары $(1, 1)$ и $(4, 4)$), т.е. удалить все петли из графа отношения (рис. 2.7а)).

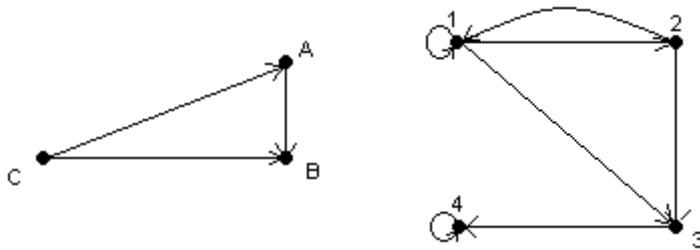


Рис. 2.7 а), б).

Отношение ρ не симметрично, т.к. не хватает пар $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$ (в симметричном отношении все стрелки графа двухсторонние). Отношение ρ не является антисимметричным, ибо лишней является одна из пар $(1, 2)$ или $(2, 1)$. Антисимметричность допускает петли в графе отношения, но не допускает двухсторонних стрелок. Отношение ρ не транзитивно, ибо не хватает пар $(2, 4)$, $(1, 4)$. На графе транзитивного отношения любая точка A , которая является началом и концом двух стрелок соответственно, будет вершиной треугольника, иллюстрирующего сложение векторов (рис. 2.7б). Отношение ρ не является связным, так как не существует путь между любыми двумя вершинами этого графа, например, между вершинами 3 и 1, 4 и 3, 4 и 2 и т.д.

Задача 2. Построить график и установить свойства бинарного отношения ρ в множестве действительных чисел.

$$x \rho y \Leftrightarrow |x + y| > 1$$

Решение.

Все пары чисел, вступивших в отношение ρ , являются координатами точек плоскости, лежащих либо выше прямой $x + y = 1$, либо ниже прямой $x + y = -1$.

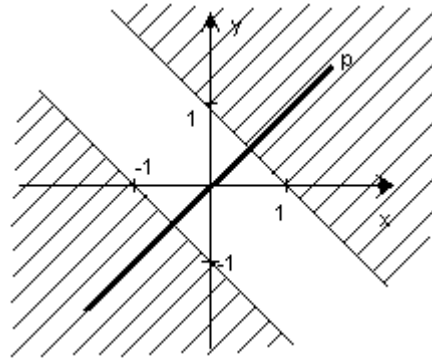


Рис. 2.8.

График отношения ρ является объединением двух полуплоскостей (заштрихованы на рис. 2.8).

Рассмотрим свойства отношения ρ .

а) рефлексивность. $\forall a \rightarrow a \rho a$. Признаком рефлексивности является включение графика диагонального отношения δ в график отношения ρ , т.е. $\delta \subset \rho$. Отношение ρ не является рефлексивным;

б) антирефлексивность: $\forall a \overline{a \rho a}$. Признаком антирефлексивности является пустое пересечение диагонального отношения δ с графиком отношения ρ . Отношение ρ не является антирефлексивным;

в) симметричность $(\forall a, b)(a \rho b \rightarrow b \rho a)$.

Признаком симметричности отношения является отношение равенства между отношением ρ и обратным к нему ρ^{-1} , т.е. $\rho = \rho^{-1}$. Отношение ρ симметрично в силу коммутативности операции сложения;

г) антисимметричность $(\forall a, b)((a \rho b \wedge b \rho a) \rightarrow (a = b))$. Признаком антисимметричности отношения является включение $\rho \cap \rho^{-1} \subset \delta$. Действительно, $(2, 0) \in \rho$, $(0, 2) \in \rho^{-1}$, но $2 \neq 0$. Заметим, что если график отношения $\rho = \delta$, то это отношение одновременно симметрично и антисимметрично;

д) транзитивность $(\forall a, b, c)((a \rho b \wedge b \rho c) \rightarrow (a \rho c))$. Признак транзитивности: $\rho * \rho \subset \rho$. Отношение ρ не является транзитивным. Контрпример: $(2, 0) \in \rho$, $(0, -2) \in \rho$, $(2, -2) \notin \rho$.

Задача 3. Пусть R_1 и R_2 – бинарные отношения на множестве S . Доказать, что композиция $R_1 * R_2$ симметричных отношений R_1 и R_2 симметрична тогда и только тогда, когда $R_1 * R_2 = R_2 * R_1$.

Решение.

Поскольку для симметричных бинарных отношений $R = R^{-1}$, то $R_1 * R_2 = R_1^{-1} * R_2^{-1} \wedge R_2 * R_1 = R_2^{-1} * R_1^{-1}$. Не трудно доказать, что $(R_1 * R_2)^{-1} = R_2^{-1} * R_1^{-1}$.

Действительно, пусть $\nu = (x, y) \in (R_1 * R_2)^{-1}$. Тогда $(y, x) \in R_1 * R_2$, следовательно, существует такое z , что $y R_1 z \wedge z R_2 x$, а значит $(z, y) \in R_1 \wedge (x, z) \in R_2^{-1}$. Поскольку $(x, z) \in R_2^{-1} \wedge (z, y) \in R_1^{-1}$, то $\nu = (x, y) \in R_2^{-1} * R_1^{-1}$. Таким образом, $(R_1 * R_2)^{-1} = R_2^{-1} * R_1^{-1}$. Следовательно, в условиях задачи $R_1 * R_2 = (R_1 * R_2)^{-1}$, т.е. композиция $R_1 * R_2$ симметричных отношений симметрична, если $R_1 * R_2 = R_2 * R_1$.

Задача 4. Найти область определения $\Pi_{\rho_A} R$, область значения $\Pi_{\rho_B} R$ отношения $R \subseteq A \times B$, определить отношения $R^{-1}, R * R, R * R^{-1}, R^{-1} * R$. Отношение R имеет вид $R = \{(x, y) | x, y \in D, 2x \geq 3y\}$.

Решение.

Поскольку $A = B = D$, то очевидно, что $\Pi_{\rho_{D=A}} R = \Pi_{\rho_{D=B}} R = D$;
 $R^{-1} = \{(x, y) | 2y \geq 3x, x, y \in D\}$;

$$\begin{aligned} R * R &= \{(x, y) | \exists z \quad x R z, z R y, x, y, z \in D\} = \\ &= \{(x, y) | \exists z \quad 2x \geq 3z, 2z \geq 3y\} = \{(x, y) | 4x \geq 9y, x, y \in D\}; \\ R * R^{-1} &= \{(x, y) | \exists z \quad 2x \geq 3z, y \geq 3z\}. \end{aligned}$$

Такое $z = (x + y) \frac{2}{3}$ можно найти для любых x и y , следовательно,
 $R * R^{-1} = \{(x, y) | x, y \in D\} = D^2$;

$$R^{-1} * R = \{(x, y) | \exists z \quad 2z \geq 3x, 2z \geq 3y\} = \{(x, y) | x \in D, y \in D\} = D^2,$$

Поскольку $z = \frac{(x+y)^3}{2}$ можно найти для любых $x \in y \in \mathbb{C} D$.

Задача 5. Каковы свойства отношений, заданных:

1. На множестве натуральных чисел \mathbb{N} :
 - а) R_1 - "быть не больше \leq ";
 - б) R_2 - "быть делителем";
 - в) R_3 - "быть равным".
2. На множестве точек действительной плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:
 - а) R_4 - "находиться на одинаковом расстоянии от начала координат";
 - б) R_5 - "быть симметричным относительно оси X ".
3. На системе множеств $\beta(M)$:
 - а) R_6 - "пересекаться с" (иметь непустое пересечение);
 - б) R_7 - "являться строгим включением \subset ".
4. На множестве людей:
 - а) R_8 - "быть сыном";
 - б) R_9 - "жить в одном городе";
 - в) R_{10} - "быть братом".
5. На множестве элементов структуры:
 - а) R_{11} - "быть непосредственно связанным с";
 - б) R_{12} - "быть начальником".

Решение.

1. На множестве \mathbb{N} :
 - а) $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$:
 - рефлексивно, не антирефлексивно, так как выполняется $a \leq a$ для всех $a \in M$, например $2 \leq 2$;
 - не симметрично, так как $2 \leq 3$, но неверно, что $3 \leq 2$;
 - антисимметрично, поскольку если $a \leq b$, $a \leq a$, то $a = b$;
 - транзитивно, так как если $a \leq b$, $a \leq c$, то $a \leq c$, например $2 \leq 3$, $3 \leq 4$ и $2 \leq 4$;
 - б) $R_2 = \{(a, b): a \text{ - делитель } b\}$:
 - рефлексивно, не антирефлексивно, так как любое число делит само себя без остатка: $a/a = 1$ для всех $a \in \mathbb{N}$;
 - не симметрично, антисимметрично, например 2- делитель 4, но 4 не является делителем 2;
 - транзитивно, так как если $b/a \in \mathbb{N}$ и $c/b \in \mathbb{N}$, то $c/a = b/a \cdot c/b \in \mathbb{N}$, например, если $6/3 = 2 \in \mathbb{N}$ и $18/6 = 3 \in \mathbb{N}$, то $18/3 = 18/6 \cdot 6/3 = 6 \in \mathbb{N}$;
 - в) $R_3 = \{(a, b): a = b\}$:
 - рефлексивно, не антирефлексивно, поскольку $a = a$ для всех $a \in \mathbb{N}$;
 - симметрично, так как если $a = b$, то $b = a$;
 - антисимметрично, так как если $a R_3 b$ и $b R_3 a$, то $a = b$;

- транзитивно, так как если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.
2. На множестве точек действительной плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:
- а) $R_4 = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) : (x_1)^2 + (y_1)^2 = (x_2)^2 + (y_2)^2\}$:
- рефлексивно, не антирефлексивно, так как $x^2 + y^2 = x^2 + y^2$ для любых точек (x, y) действительной плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
 - симметрично, не антисимметрично, так как, например, для точек $(2, 3)$ и $(-2, 3)$ имеет место $2^2 + 3^2 = (-2)^2 + 3^2$, но $(2, 3) \neq (-2, 3)$;
 - транзитивно, поскольку если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) находятся на одинаковом расстоянии от начала координат, а также (x_2, y_2) и (x_3, y_3) , то и (x_1, y_1) и (x_3, y_3) находятся на одинаковом расстоянии от начала координат;
- б) $R_5 = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) : x_1 = x_2, y_1 = -y_2\}$:
- не рефлексивно, так как для точек плоскости (x, y) , не находящихся на оси X , т.е. для точек с координатами $y \neq 0$, не выполняется $(x, y) R_5 (x, y)$;
 - не антирефлексивно, так как точка плоскости симметрична самой себе, если она лежит на оси X , т.е. для точек (x, y) с координатами $y = 0$ имеет место $(x, y) R_5 (x, y)$;
 - симметрично, например $(2, 3) R_5 (2, -3)$ и $(2, -3) R_5 (2, 3)$;
 - не антисимметрично, поскольку имеет место, например, $(2, 3) R_5 (2, -3)$ и $(2, -3) R_5 (2, 3)$, но $(2, -3) \neq (2, 3)$;
 - не транзитивно, так как, например, $(2, 3) R_5 (2, -3)$ и $(2, -3) R_5 (2, 3)$, но не выполняется $(2, 3) R_5 (2, 3)$.
3. На системе множеств $\beta(M)$:
- а) $R_6 = \{(A, B) : A \cap B \neq \emptyset, A, B \subseteq \beta(M)\}$:
- не рефлексивно, поскольку для $\emptyset \in \beta(M)$ имеет место $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$;
 - не антирефлексивно, так как для $A \in \beta(M)$, если A не пусто, т.е. $A \neq \emptyset$, то $A \cap A \neq \emptyset$, т.е. отношение выполняется;
 - симметрично, так как если A пересекается с B , то и B — с A ;
 - не антисимметрично, поскольку $A R_6 B$ и $B R_6 A$ для $A \neq B$;
 - не транзитивно, например $\{a\} R_6 \{a, b\}$ и $\{a, b\} R_6 \{b\}$, но $\{a\} R_6 \{b\}$ не выполняется;
 - не рефлексивно, антирефлексивно, так как ни для каких $A \in \beta(M)$ не выполняется $A \subset A$;
 - не симметрично, поскольку из $A \subset B$ не следует $B \subset A$;
 - антисимметрично, так как ни для каких A, B таких, что $A \neq B$, не выполняется одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$;
 - транзитивно, так как для любых $A, B, C \in \beta(M)$ из $A \subset B$ и $B \subset C$ следует $A \subset C$.
4. На множестве людей:
- а) $R_8 = \{(a, b) : a \text{ - сын } b\}$:
- не рефлексивно, антирефлексивно, так как ни для каких a не выполняется: $a \text{ - сын } a$;

- не симметрично, антисимметрично, поскольку ни для каких $a \neq b$ не выполняется: a - сын b и b - сын a ;
- не транзитивно, так как если: a - сын b и b - сын c , то a не сын c ;
- б) $R_9 = \{(a, b): a \text{ живет в одном городе с } b\}$:
 - рефлексивно, не антирефлексивно, так как $a R_9 a$ для всех a ;
 - симметрично, поскольку для любых a, b , если $a R_9 b$, то $b R_9 a$;
 - не антисимметрично, так как имеет место $a R_9 b$ и $b R_9 a$ для $a \neq b$;
 - транзитивно, поскольку для всех a, b, c , если $a R_9 b$ и $b R_9 c$, то $a R_9 c$;
-) $R_{10} = \{(a, b): a \text{ - брат } b\}$:
 - не рефлексивно, антирефлексивно из-за очевидного отсутствия $a R_{10} a$ для всех a ;
 - не симметрично, так как в общем случае между братом a и сестрой b имеет место $a R_{10} b$, но не $b R_{10} a$;
 - не антисимметрично, так как если a и b - братья, то $a R_{10} b$ и $b R_{10} a$, но $a \neq b$;
 - транзитивно, если называть братьями людей, имеющих общих родителей (отца и мать).

5. На множестве элементов структуры:

- а) $R_{11} = \{(a, b): a \text{ - непосредственно связан с } b\}$:
- не рефлексивно, антирефлексивно, если в конкретной интерпретации $a R_{11} a$ не имеет смысла;
 - симметрично, не антисимметрично, поскольку для всех $a \neq b$, если выполняется $a R_{11} b$, то $b R_{11} a$;
 - не транзитивно, так как при $a R_{11} b$ и $b R_{11} c$ не выполняется $a R_{11} c$ (a и c связаны, но опосредованно);
- б) $R_{12} = \{(a, b): a \text{ - начальник } b\}$:
- не рефлексивно, антирефлексивно (см. R_{11});
 - не симметрично, антисимметрично, так как для всех $a \neq b$ не выполняется одновременно $a R_{12} b$ и $b R_{12} a$;
 - транзитивно, так как если a - начальник b и b - начальник c , то a - начальник c .

Задача 6. Пусть на множестве $M = \{2, 4, 6\}$ определено отношение R - "быть меньше". Задать характеристическим свойством и списком отношение R , обратное отношение R^{-1} и дополнение \bar{R} . Сравнить отношения. Определить их свойства.

Решение.

$$R = \{(a, b): a < b\} \text{ - "быть меньше"}. R = \{(2, 4), (2, 6), (4, 6)\}.$$

$$R^{-1} = \{(a, b): \{b, a\} \in R\} = \{(a, b): a > b\} \text{ - "быть больше"}. R^{-1} = \{(4, 2), (6, 2), (6, 4)\}.$$

$$\bar{R} = (M \times M) \setminus R = \{(a, b): (a, b) \notin R\} = \{(a, b): a \geq b\} \text{ - "быть не меньше"}. \bar{R} = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (4, 2), (6, 2), (6, 4), (2, 6), (4, 6)\}.$$

$$\bar{R} = \{(2,2), (4,2), (4,4), (6,2), (6,4), (6,6)\}.$$

Отношения R и R^{-1} - антирефлексивны, антисимметричны, транзитивны, т.е. являются отношениями строгого порядка. Эти отношения задают полный порядок на множестве M .

Отношение \bar{R} - рефлексивно, антисимметрично, транзитивно, т.е. является отношением нестрогого порядка; оно также задает полный порядок на множестве M .

Задания для самостоятельной работы

1. Доказать, что если R_1 и R_2 рефлексивны и симметричны, то рефлексивны и симметричны отношения $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1} , $R_1 * R_2$, $R_1 \dot{\in} R_2$ - бинарные отношения на множестве S .

2. Построить бинарное отношение:

- а) рефлексивное, симметричное, не транзитивное;
- б) рефлексивное, антисимметричное, не транзитивное;
- в) рефлексивное, не симметричное, транзитивное;
- г) не рефлексивное, антисимметричное, транзитивное.

3. Какими свойствами характеризуются следующие отношения:

а) отношение на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\} = A$ $R = \{(a, b) \mid (a - b) \div 3, \delta \hat{u} \hat{a} \hat{;}\}$

б) отношение на множестве людей $R = \{(a, b) \mid a \dot{\in} b \dot{\in} \hat{a} \hat{p} \hat{\delta} \hat{;}\}$

в) отношение на множестве людей $R = \{(a, b) \mid a \dot{\in} b \hat{\delta} \hat{a} \hat{n} \hat{\delta} \hat{a} \hat{u} \hat{i} \hat{e} \hat{;}\}$

г) отношение на множестве ЭВМ

$$R = \left\{ (a, b) \mid \begin{array}{l} \hat{Y} \hat{A} \hat{I} \hat{;}\ (\hat{a}) \hat{n} \hat{i} \hat{a} \hat{i} \hat{n} \hat{\delta} \hat{e} \hat{i} \hat{a} \hat{;}\ \hat{n} \hat{Y} \hat{A} \hat{I} \hat{;}\ (\hat{a}) (\hat{\delta} \hat{.} \hat{a} \hat{i} \hat{\delta} \hat{a} \hat{\delta} \hat{a} \hat{i} \hat{i} \hat{a} \hat{;}\ \hat{i} \hat{a} \hat{i} \hat{e} \hat{n} \hat{a} \hat{i} \hat{u} \hat{a} \hat{y} \hat{;}\ \hat{a} \hat{e} \hat{y} \hat{a} \hat{;}\ \hat{;}\ \hat{i} \hat{u} \hat{a} \hat{e} \hat{\delta} \hat{;}\ \hat{a} \hat{i} \hat{i} \hat{e} \hat{i} \hat{y} \hat{\delta} \hat{i} \hat{i} \hat{n} \hat{;}\ \hat{y} \hat{i} \hat{a} \hat{;}\ \hat{a} \end{array} \right\}.$$

4. Доказать, что если R_1 и R_2 - отношения эквивалентности на A , то

а) $R_1 * R_2 = A^2 \Rightarrow R_1 = A^2$;

б) $R_1 * R_2 = A^2 \Rightarrow R_2 * R_1 = A^2$.

5. Доказать, что $(\alpha * \beta)^{-1} = \beta^{-1} * \alpha^{-1}$, где α и β - бинарные отношения на A .

6. Доказать, что для бинарных отношений выполняются тождества:

$$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}, \quad \overline{R^{-1}} = (\overline{R})^{-1},$$

$$(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}, \quad (R^{-1})^{-1} = R.$$

7. Найти область определения $\Pi_{\rho_A} R$, область значений $\Pi_{\rho_B} R$ отношения $R \subseteq A \times B$, определить R^{-1} , $R * R$, $R * R^{-1}$, $R^{-1} * R$ для следующих отношений:

а) $R = \{(x, y) \mid x \hat{a} \hat{a} \hat{e} \hat{e} \hat{\delta} \hat{;}\ y, x, y \in N\}$; N - множество натуральных чисел;

б) $R = \{(x, y) \mid x + y < 0, x, y \in D\}$; D - множество действительных чисел.

8. Определить тип отображений (биекция, инъекция и т.д.).

- а) $\{(k, k+1) \mid k \in Z\}$, Z - множество целых чисел;
б) $\{(x, x^3) \mid x \in D\}$, D - множество действительных чисел;
в) $\{(x, 2^x) \mid x \in D\}$;
г) $\{(x, \sin x) \mid x \in D\}$.

9. Доказать следующие тождества для любой функции:

- а) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
б) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;
в) $f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^k R_i\right) = \bigcap_{i=1}^k f^{-1}(R_i)$, $f: A \rightarrow B$, $R_i \subseteq B$.