

### Тема 3. Логические задачи и рассуждения

Решение логических задач *методом характеристического уравнения* разбивается на ряд шагов:

1) Введение булевых переменных, соответствующих простым высказываниям  $x_j \in [0,1], j = 1 \div n, x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

2) Запись условия задачи в виде логических уравнений  $f_i(x) = 1, i = 1 \div m$ , где  $f_i(x)$  – логическая функция

3) Сведение системы уравнений к характеристическому уравнению  $\bigcap_{i=1}^m f_i(x) = 1$ , множество корней которого совпадает с множеством корней системы (1)

4) Приведение левой части характеристического уравнения к ДНФ и решение его:

- приравнивание каждого слагаемого ДНФ (СДНФ), независимо от других, к единице и извлечение из уравнения значений переменных. Каждый их набор является решением задачи.

- если после упрощения в ДНФ осталось только одно слагаемое, задача имеет единственное решение. В случае, когда в левой части уравнения все слагаемые уничтожены, задача не имеет решения.

*Проверка правильности рассуждений.* Рассуждение есть утверждение того, что некоторое высказывание (заключение) следует из других высказываний (посылок). Рассуждение будет правильным, если из конъюнкции посылок следует заключение, т.е. между конъюнкцией посылок и заключением установлено отношение следствия.

В этом случае импликация должна быть тавтологией.

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q \quad (1)$$

Правильность рассуждения можно установить, построив таблицу истинности высказывания (1) и убедившись в том, что оно тождественно истинно.

Правильность рассуждения можно установить и методом «от противного». Этот метод заключается в том, что, полагая заключения  $q$  ложным, а некоторые посылки  $p_i$  истинными, проверяем, найдётся ли хотя бы одна посылка, принимающая значение ложно. Если да, то рассуждение правильно.

### Занятие 3

#### Решение логических задач методом характеристического уравнения

#### Вопросы к занятию:

Метод характеристического уравнения.

## Примеры решения задач

Продemonстрируем данный метод при решении задач из книги Р.М. Смаллиана «Принцесса и тигр».

*Условие задачи.* В некотором царстве правил король. Однажды он предложил узнику отгадать, в какой комнате находится принцесса, а в какой тигр. Узнику было объявлено, что в каждой комнате находится либо принцесса, либо тигр, однако может оказаться, что сразу в обеих комнатах будет обнаружено по тигру или по принцессе.

На табличках, прикрепленных к двери каждой из комнат, было написано:

<p>1. В этой комнате находится принцесса, а в другой комнате сидит тигр.</p> $(f_1 = x_1 \bar{x}_2 \bar{y}_1 y_2)$	<p>2. В одной из этих комнат находится принцесса, кроме того, в одной из этих комнат сидит тигр.</p> $(f_2 = (x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2)(y_1 \bar{y}_2 \vee \bar{y}_1 y_2))$
--	---

Король сообщил узнику, что на одной из таблиц написана правда, на другой – ложь. Какую дверь надо открыть узнику, если он предпочитает принцессу тигру?

*Решение.*

Формулируем простые высказывания:

- $x_i$  – «принцесса находится в комнате  $i$ »:  $i=1,2$ ;
- $y_i$  – «тигр сидит в комнате  $i$ »:  $i=1,2$ ;

формулируем сложные высказывания, соответствующие условию задачи:

$$f_1 = x_1 \bar{x}_2 \bar{y}_1 y_2$$

$$f_2 = (x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2)(y_1 \bar{y}_2 \vee \bar{y}_1 y_2) \quad f_0 = x_1 x_2 \bar{y}_1 \bar{y}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 y_1 y_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{y}_1 y_2 \vee \bar{x}_1 x_2 y_1 \bar{y}_2$$

Получаем систему уравнений:

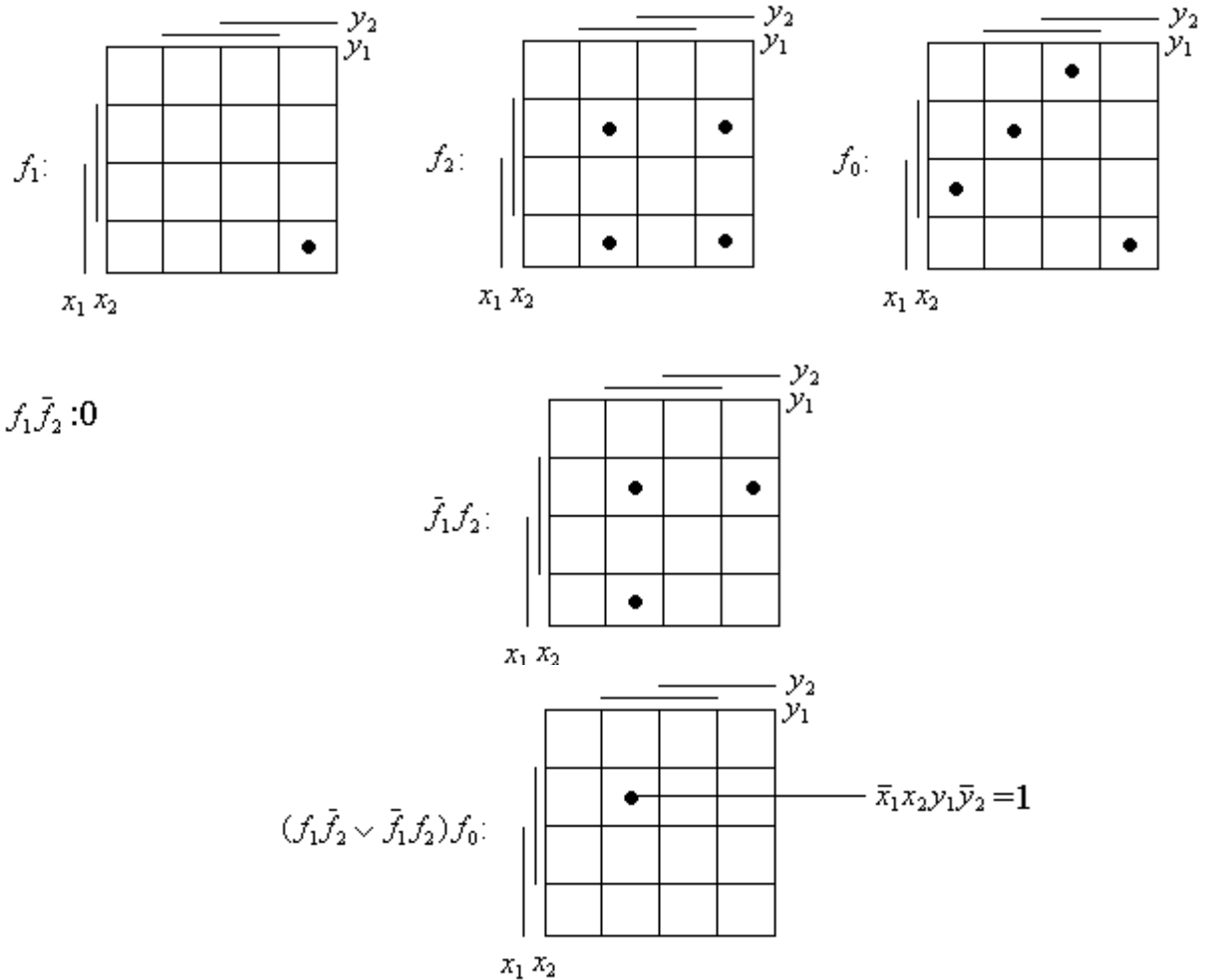
$$f_0 = 1$$

$$f_1 \bar{f}_2 \vee \bar{f}_1 f_2 = 1$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$(f_1 \bar{f}_2 \vee \bar{f}_1 f_2) f_0 = 1$$

Приведение левой части характеристического уравнения к ДНФ. Реализуем логические функции с помощью матричного представления :



Из последней матрицы видно, что ДНФ содержит только одно слагаемое. Решением уравнения является набор 0110, т.е. принцесса находится в комнате 2, а тигр в комнате 1.

### Задания для самостоятельной работы

Задача 1. «Принцесса или тигр». *Испытание первого дня.*

В некотором царстве правил король. Однажды он предложил узникам угадать, в какой из двух комнат находится принцесса, а в какой – тигр. Узникам было объявлено, что в каждой комнате находится либо принцесса, либо тигр, однако может оказаться, что сразу в обеих комнатах будет обнаружено по тигру или по принцессе.

1.1. Для одного узника таблички на дверях сменили.

(первая дверь) – По крайней мере в одной из этих комнат находится принцесса;

(вторая дверь) – Тигр сидит в другой комнате.

Король сообщил узнику, что утверждения на табличках могут быть оба истинны, а могут быть оба ложны. Какую из комнат следует выбрать второму узнику?

1.2. Другому узнику король объявил, что утверждения на табличках могут быть оба истинны, а могут быть оба ложны. Надписи же были такие

(первая дверь) – Либо в этой комнате сидит тигр, либо принцесса находится в другой комнате;

(вторая дверь) – Принцесса находится в другой комнате.

Кто же обнаруживается в комнате 1, а кто – в комнате 2?

Задача 2. «Принцесса или тигр». *Испытания второго дня*

В некотором царстве правил король. Однажды он предложил узникам угадать, в какой из двух комнат находится принцесса, а в какой – тигр. Испытания второго дня начались с того, что король объявил узнику относительно комнаты 1 следующее: если в этой комнате находится принцесса, то утверждение на табличке истинно, если же тигр, то оно ложно. Для комнаты 2 все было наоборот.

Вновь узникам было объявлено, что в каждой комнате будет находиться либо принцесса, либо тигр, но может оказаться, что в обеих комнатах окажется либо по принцессе, либо по тигру.

2.1. Первый узник увидел другие таблички

(первая дверь) – По крайней мере, в одной из комнат находится принцесса;

(вторая дверь) – Принцесса в другой комнате.

В какой комнате сидит принцесса?

2.2. Второй узник прочитал следующие надписи:

(первая дверь) – Что ни выберешь - все едино;

(вторая дверь) – Принцесса в другой комнате.

Как должен поступить узник?

Задача 3. Задачи о хищениях.

3.1. На складе было совершено хищение. Преступник (или преступники) вывез награбленное на автомашине. Подозрение пало на трех рецидивистов *A*, *B* и *C*, которые были допрошены. Установлено следующее: 1) Никто, кроме *A*, *B*, *C*, не был замешан в хищении; 2) *C* некогда не ходил «на дело» без *A* (и, возможно, других соучастников); 3) *B* не умеет водить машину. Виновен или не виновен *A*?

3.2. Подозреваемые в хищении *A*, *B* и *C* были вызваны на допрос. Установлено следующее: 1) Никто, кроме *A*, *B*, *C*, не был замешан в хищении; 2) *A* некогда не идет «на дело», по крайней мере, без одного соучастника; 3) *C* не виновен. Виновен или не виновен *B*?

Задача 4. Задачи о Рыцарях и Лжецах

На острове «Двоичном» живут Рыцари и Лжецы. Рыцари говорят только правду, Лжецы – только ложь.

4.1. Прохожий незнакомец встретил трех жителей острова, разговаривающих между собой,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Он спросил у  $A$ : «Вы Рыцарь или Лжец?» Тот ответил, но неразборчиво, ничего нельзя было понять. Тогда незнакомец спросил у  $B$ : «Что сказал  $A$ ?». Тот ответил: « $A$  сказал, что он Лжец». В разговор вмешался  $C$ : « Не верьте  $B$ ! Он лжет!» Кто из островитян  $B$  и  $C$  Рыцарь, а кто Лжец?

4.2. Есть три островитянина  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . При этом высказываются следующие утверждения -  $A$ : « $B$ -Лжец»,  $B$ : « $A$  и  $C$  – оба одновременно Лжецы или одновременно Рыцари». Кто такой  $C$  – Рыцарь или Лжец?

Задача 5. Записать логической формулой следующие умозаключения и уточнить их справедливость.

5.1. Если Марианна – не дочь Педро, то либо Хосе Игнасиас – отец Марианны, либо Луис Альберто – не ее брат. Если Луис Альберто – брат Марианны, то Марианна – дочь Дона Педро и Хосе Игнасиас лжет. Если Хосе Игнасиас лжет, то либо Луис Альберто – не брат

5.2. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью и убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Следовательно, Смит был убийцей.

## Занятие Проверка правильности рассуждений

### Вопросы к занятию:

Способы проверки правильности рассуждений.

### Примеры решения задач

*Задача 1.* Следует установить, правильно ли рассуждение: "Если функция на данном интервале непрерывна и имеет разные знаки на концах, то внутри данного интервала функция обращается в нуль. Функция не обращается в нуль внутри данного интервала, но на концах интервала имеет разные знаки. Следовательно, функция разрывна."

*Решение.*

Посылки и заключения в данном рассуждении состоят из следующих элементарных высказываний:

$A$  - "Функция непрерывна на данном интервале."

$B$  - "Функция обращается в нуль внутри данного интервала."

$C$  - "Функция имеет разные знаки на концах интервала."

Используя эти обозначения, запишем посылки ( $P_1$  и  $P_2$ ) и заключение ( $Q$ ) в виде формул и для проверки правильности рассуждения построим истинностную таблицу (табл. 3.1):

Таблица 3.1

				$P_1$	$P_2$		$Q$		
A	B	C	AC	$AC \rightarrow B$	$\bar{B}$	$\bar{B}C$	$P_1P_2$	$\bar{A}$	$P_1P_2 \rightarrow Q$
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1

Убеждаемся, что рассуждение верно.

Проведем проверку правильности рассуждения методом от противного. Предположим, что в этом случае конъюнкция посылок ложна. В самом деле, если  $Q = \bar{A}$  ложно, то  $A$  истинно. Пусть  $P_2 = \bar{B}C$  - истинна, тогда  $C$  - истинно,  $\bar{B}$  - истинно, т.е.  $B$  - ложно, но в этом случае посылка  $P_1$  принимает значение ложно, что противоречит условию.

Правильность данного рассуждения можно проверить также, преобразовав формулу  $P_1P_2 \rightarrow Q$  к некоторой равносильной ей формуле, которая задает заведомо тождественно истинное высказывание.

*Задача 2.* Представить логической формулой следующий текст (составное высказывание): «Если фирма продолжает выпуск существующего продукта и ориентирована на существующий рынок, то для нее целесообразна стратегия "малого корабля", или экономии издержек. Такая стратегия привлекательна, если интенсивный маркетинг - стратегический хозяйственный фактор, но слабая сторона организации. Если интенсивный маркетинг является стратегическим хозяйственным фактором и сильной стороной фирмы, то фирме следует придерживаться стратегии захвата новых рынков для существующего продукта».

*Решение.*

Введем обозначения простых высказываний, содержащихся в первом предложении:

$A$  - "Фирма продолжает выпуск существующего продукта".

$B$  - "Фирма ориентирована на существующий рынок".

C- "Для фирмы целесообразна (привлекательна) стратегия «малого корабля»".

D- "Для фирмы целесообразна (привлекательна) стратегия экономии издержек".

С учетом введенных обозначений логическая формула для первого предложения примет вид:

$$(A \wedge B) \rightarrow (C \leftrightarrow D).$$

Второе предложение содержит новые простые высказывания:

K - "Интенсивный маркетинг является стратегическим хозяйственным фактором организации".

L - "Интенсивный маркетинг является слабой стороной организации".

Логическая формула, представляющая второе предложение:

$$(K \wedge L) \rightarrow (C \leftrightarrow D)$$

В третьем предложении содержатся новые простые высказывания:

M- "Интенсивный маркетинг является сильной стороной организации".

N - "Фирме следует придерживаться стратегии захвата новых рынков для существующего продукта".

Логическая формула для третьего предложения:

$$(K \wedge M) \rightarrow N$$

Окончательно текст записывается следующей логической формулой:

$$((A \wedge B) \rightarrow (C \leftrightarrow D)) \wedge ((K \wedge L) \rightarrow (C \leftrightarrow D)) \wedge ((K \wedge M) \rightarrow N).$$

### Задания на самостоятельную работу

1. Исходя из определения логической формулы, определить, являются ли формулами следующие выражения:

а)  $((A \vee B) \rightarrow \bar{C}) \leftrightarrow D) \wedge ((A \oplus C) \rightarrow \bar{D})$

б)  $((A \oplus \bar{B}) \rightarrow C) \leftrightarrow (D \rightarrow B)$

2. Записать логическими формулами следующие сложные высказывания:

а) "Этот человек студент или предприниматель".

б) "Петров женат на Марье Ивановне или Лукерье Ильиничне".

в) "Если при выполнении программы отклонение контролируемых параметров превышает предусмотренные нормы (стандарты), то требуется оперативная корректировка программы или уточнение стандартов".

3. Представить формулами логики высказываний следующие суждения (сложные высказывания):

а) "Если темпы роста рынка продукта корпорации высокие и размер контролируемой ею доли рынка также высок, то в соответствии с матрицей портфельного анализа этот продукт относится к категории «звезда»; он дает большой доход, но требует значительных вложений".

б) "Стратегическая хозяйственная единица корпорации занимает сильные позиции на рынке и работает в привлекательной отрасли, следовательно, имеет наиболее высокий приоритет при распределении ресурсов".

в) "Если стратегическая хозяйственная единица корпорации - лидер в непривлекательной (возможно, старой) отрасли, ее стратегией может быть максимизация прибыли на уже вложенный капитал, но не вложение нового".

г) "Если при высокой доле рынка темпы роста рынка низкие, то продукт относится к категории «денежного мешка», или «дойной коровы»; он дает большие доходы и характеризуется малыми затратами в связи со стабильностью рынка".

д) "Если прогноз показывает, что можно получить крупную прибыль на выпуске новых товаров, то при разработке стратегии развития фирме следует сделать упор на маркетинг и сеть распределения, а также целесообразно открыть более крупные магазины и расширить торговую сеть".

е) "В ситуации, где жизненно необходимо расширение фирмы или где ключевые патенты или ключевые ресурсы находятся в руках у других компаний, а данной фирме недостает технических знаний, лучшей стратегией для нее является приобретение (предприятий)".

4. Записать логической формулой следующий текст: "Если компьютер при запуске не выдает ошибку при проверке оперативной памяти, то она исправна. Если при запуске он выдает ошибку при проверке оперативной памяти и память установлена правильно, то либо оперативная память дефектна, либо дефектна материнская плата. Тогда если эта оперативная память правильно установлена в другой (контрольный) компьютер и он при запуске не выдает ошибку при проверке оперативной памяти, то оперативная память исправна".

5. Записать логической формулой следующую пословицу:  
"Не ел - не мог, поел - без ног".