Тема 8. Графы: связность, обходы, кратчайшие пути

8.1. ***Маршруты, цепи, циклы.*** Граф есть упорядоченная пара $G=(X,E)$, где X — непустое множество, называемое множеством вершин; E — неупорядоченное бинарное отношение на X, т.е. множество неупорядоченных пар (x_i, x_j), называемых ребрами.

Любой граф $G=(X,E)$ можно задать бинарным отношением инцидентности между множествами X и E и отношением смежности на множестве X. Поскольку любое бинарное отношение задается матрицами, то и граф можно задать матрицей инцидентности и матрицей смежности.

Пусть G - неориентированный граф. Маршрутом в G называется такая последовательность рёбер ($e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots e_k$), в которой каждые два соседних ребра e_{i-1} и e_i имеют общую вершину. Начало маршрута – вершина x_0, инцидентная ребру e_i и не инциндентная ребру e_2. Конец маршрута – вершина x_k, инциндентная e_k и не инциндентная e_{k-1}. Маршрут называется замкнутым, если совпадают его начальные и конечные вершины($x_0=x_k$). Маршрут, в котором все рёбра различны, называются цепью. Цепь, не содержащая повторяющихся вершин, именуется простой цепью.

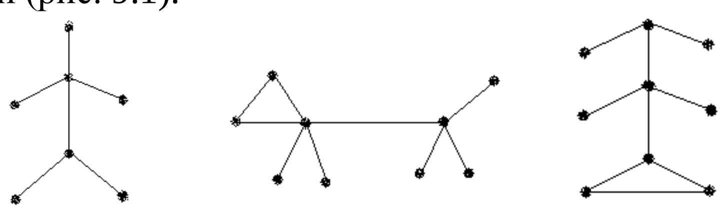
Замкнутая цепь называется циклом, простая замкнутая цепь – простым циклом. Ниже приведены аналогичные понятия для ориентированного графа (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Маршрут	Путь
Замкнутый маршрут	Контур
Цепь	Орцепь
Простая цепь	Простая орцепь
Цикл	Орцикл
Простой цикл	Простой орцикл

Граф G называется связным, если каждая пара его вершин может быть соединена цепью. Граф не являющийся связным, можно разбить на конечное число связных подграфов, называемых компонентами связности. Обозначим через k - число компонент связности графа. Так, граф G_1 имеет 3 компоненты связности (рис. 9.1).

G_1:



(k=3)

Рис. 9.1

Разрезом графа называется множество рёбер, удаление которых увеличивает число компонент связности графа. Разрез называется простым, если никакая его собственная часть не является разрезом. Вершинная связность графа – наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному графу. Рёберная связность графа – наименьшее число ребёр, удаление которых приводит к несвязному графу.

Орграф называется сильно связным, если для любых двух различных вершин x_i и x_j существует по крайней мере один путь, соединяющий x_i и x_j. Сильная компонента – максимально сильный связный подграф графа $\vec{G}$.

8.2. ***Достижимость и связность.*** Если существует путь, идущий от вершины x_i к вершине x_j, то говорят, что x_j достижима из вершины x_j. Обозначим через $R(x_i)$ множество вершин графа, достижимых из вершины x_i. Определим матрицу достижимостей $R=(r_{ij})$ с элементами

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_j \text{ достижима из } x_i \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Пусть через $\Gamma(x_i)$ обозначено множество вершин, которые достижимы из x с использованием путей длины 1, через $\Gamma^2(x_i)$ – множество вершин, достижимых из x_i с использованием путей длины 2,…, $\Gamma^p(x_i)$ – множество вершин, достижимых из x_i с использованием путей длины p. Тогда $R(x_i)$ можно представить в виде

$R(x_i)=\{x_i\}\cup\Gamma(x_i)\cup\Gamma^2(x_i)\cup...\cup\Gamma^p(x_i)$, где $\cup$ – операция объединения множеств.

Алгоритм Кристофидеса. Множество $R(x_i)$ получается последовательным выполнением (слева направо) операций объединения в соотношении () до тех пор, пока «текущее» множество не перестает увеличиваться по размеру при очередной операции объединения.

Обозначим через $Q(x_i)$ множество вершин, из которых можно достичь вершину x_i. Определим матрицу контрдостижимостей $Q=(q_{ij})$ с элементами

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_j \text{ достижима из } x_i \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Пусть через $\Gamma^{-1}(x_i)$ обозначено множество вершин, из которых можно достичь вершину x_i. С использованием путей длины 1, $\Gamma^{-p}(x_i)$ – множество вершин, из которых можно достичь вершину x_i с использованием путей длины p. Тогда $Q(x_i)$ можно представить в виде:

$Q(x_i) = \{x_i\}\cup\Gamma^{-1}(x_i)\cup\Gamma^{-2}(x_i)\cup...\cup\Gamma^{-p}(x_i)$,

Занятие
Достижимость и контрдостижимость

Вопросы к занятию:

1. Основные понятия теории графов
2. Матрицы достижимости и контрдостижимости. Алгоритм Кристофидеса

Примеры решения задач

Задача 1. Найти в графе (рис. 8.3) маршрут, цепь, цикл.

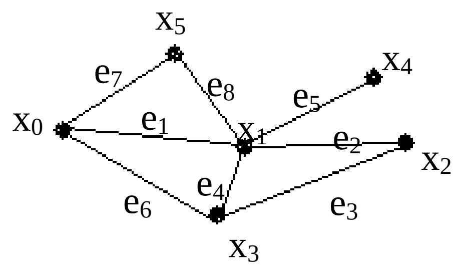


Рис. 8.3

Решение.

$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_2\}$ – маршрут, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ – цепь, $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_8, e_7\}$ – цикл, $\{e_1, e_2, e_3\}$ – простая цепь, $\{e_2, e_3, e_4\}$ – простой цикл, $\{e_5\}$ – простой разрез (мост), $\{e_2, e_3, e_5\}$ – разрез, $\{e_2, e_3\}$ – простой разрез.

Задача 2. Построить матрицы смежности, достижимостей и контрдостижимостей для графа (рис. 8.4).

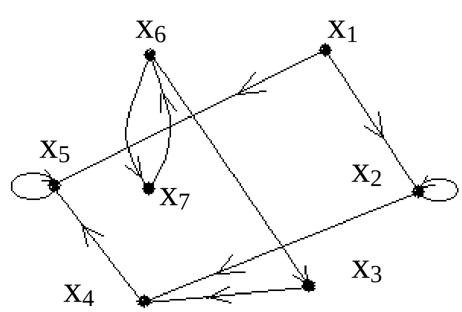


Рис. 8.4

Решение.

Матрица смежности $C = (C_{ij})$=

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0	1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	0	1
7	0	0	0	1	0	1	0

Матрица достижимостей $R = (r_{ij})$ =

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	1	1	0	1	1	0	0
2	0	1	0	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	1	1	1	1	1
7	0	0	1	1	1	1	1

Матрица контрдостижимостей $Q = (q_{ij})$ =

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	1	1
4	1	1	1	1	0	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1
7	0	0	0	0	0	1	1