Основные понятия функции нескольких переменных.

Частные производные, дифференциал.

Пример 1. Найти и изобразить область определения функции:

а) $z = \ln(2x - y)$; б) $z = y\sqrt{\sin x}$; в) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$;

г) $z = \arccos\dfrac{1}{x + y}$; д) $z = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \arccos(1 - y)$.

Решения

а) Область определения функции описывается неравенством $y < 2x$

(рис. 1).

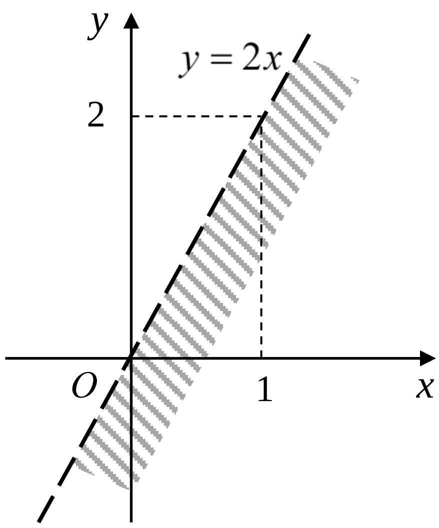

Рис. 1

б) Областью определения функции является множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sin x \geq 0$. Это неравенство эквивалентно совокупности неравенств $2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (рис. 2).

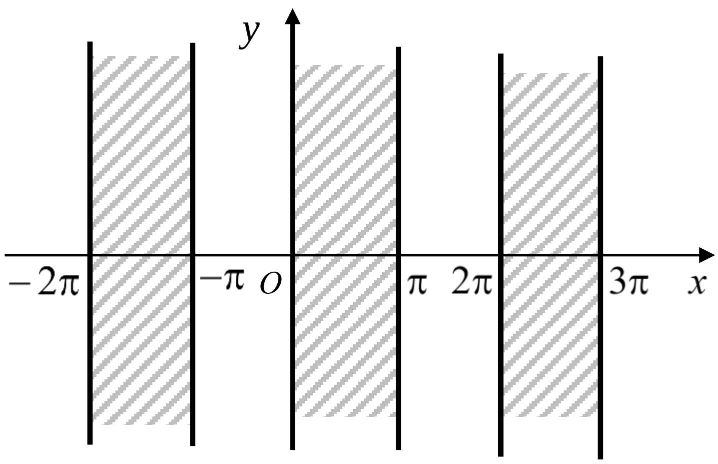

Рис. 2

в) Область определения функции описывается системой неравенств $\begin{cases} |x| \le 1, \\ |y| \ge 1 \end{cases}$ (рис. 3).

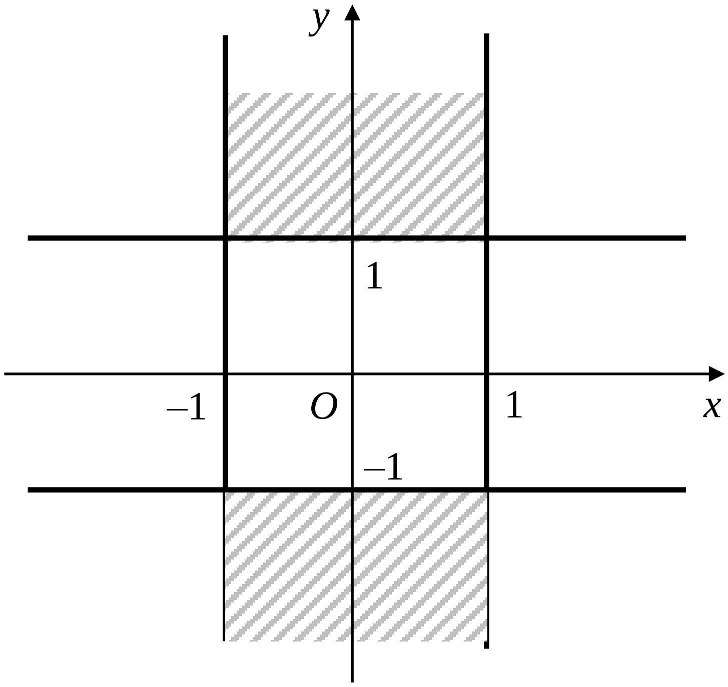

Рис. 3

г) Область определения функции описывается неравенствами $\left[\begin{array}{l} y + x \ge 1, \\ y + x \le -1 \end{array}\right.$ ~

$\left[\begin{array}{l} y \ge 1 - x, \\ y \le -1 - x \end{array}\right.$ (рис. 4).

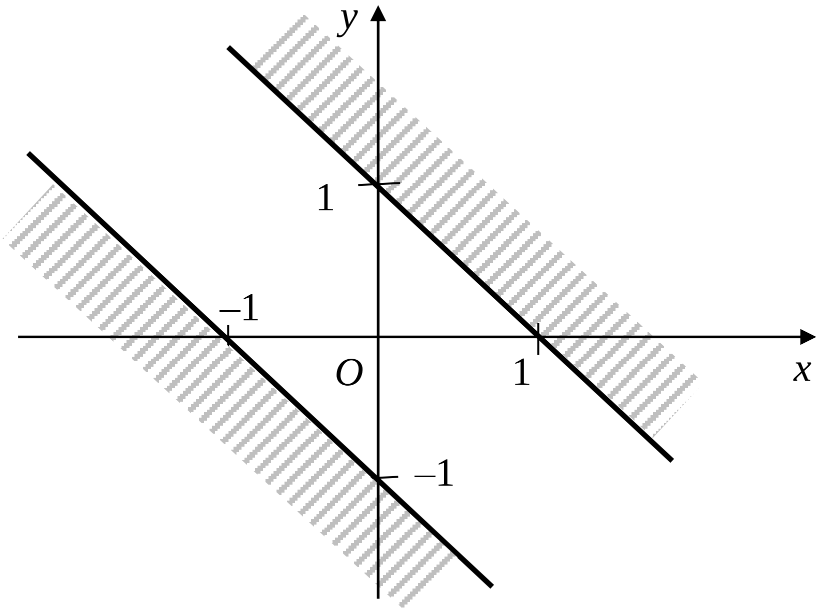

Рис. 4

д) Область определения функции описывается системой неравенств $\begin{cases} 0 < y \le 2, \\ -y^2 \le x \le y^2. \end{cases}$

Это криволинейный треугольник, ограниченный параболами $x = y^2$, $x = -y^2$ и прямой $y = 2$, исключая вершину $O(0;0)$ (рис. 5).

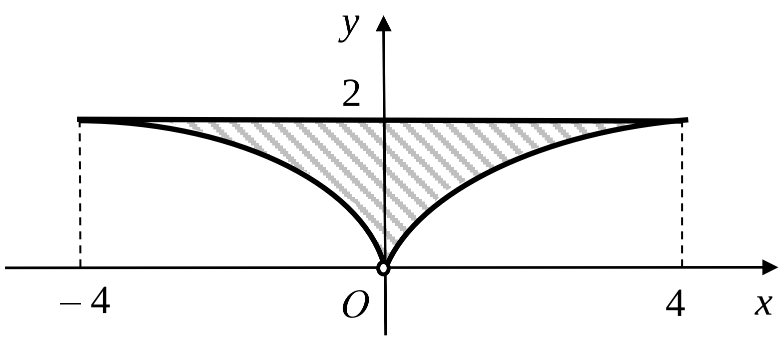

Рис. 5

Пример 2. Найти линии уровня функции:

а) $z = x^2 + y^2$; б) $z = x^2 - y^2$; в) $z = \ln(x^2 + y)$; г) $z = \sqrt{xy}$; д) $z = (x + y)^2$.

Решения

а) концентрические окружности $x^2 + y^2 = c,\ c \ge 0$;

б) семейство равносторонних гипербол $x^2 - y^2 = c,\ c \ne 0$; при $c = 0$ – пара прямых $y = \pm x$;

в) параболы $y = c - x^2,\ c > 0$;

г) семейство равносторонних гипербол $xy = c,\ c > 0$; при $c = 0$ – оси координат;

д) параллельные прямые $y = c - x,\ c \ge 0$.

Пример 3. Найти поверхности уровня следующих функций:

а) $u = x + y + z$; б) $u = x^2 + y^2 - z^2$.

Решения

а) плоскости $x + y + z = c$, параллельные плоскости $x + y + z = 0$;

б) однополостные гиперболоиды $x^2 + y^2 - z^2 = c,\ c > 0$; двуполостные гиперболоиды при $c < 0$, конус при $c = 0$.

Пример 4. Показать, что следующие пределы а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ и б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ не существуют.

Решения

а) Исследуем предел этой функции по различным направлениям в точке (0; 0):

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Полученное значение зависит от k. Следовательно, указанный предел не существует.

б) Поступим аналогичным способом:

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = 0.$$

В то же время $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$

Таким образом, для рассмотренной функции существует один и тот же предел по любому направлению, а предел по указанной параболе хотя и существует, но отличен от общего значения пределов по направлениям. Тем самым мы показали, что предел в точке (0; 0) не существует.

Пример 5. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ y\to \pi}} \frac{\sin x - \sin y}{x-y}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

Решения

$$\text{а) } \lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ y\to \pi}} \frac{\sin x - \sin y}{x-y} = \lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ y\to \pi}} \frac{2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}}{\frac{x-y}{2}\cdot 2} = \lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ y\to \pi}} \cos\frac{x+y}{2} = -1.$$

б) Пусть $x \neq 0,\ \ y \neq 0,$ тогда

$$0<\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=\frac{x^2}{x^4+y^4}+\frac{y^2}{x^4+y^4}\le\frac{x^2}{x^4}+\frac{y^2}{y^4}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}.$$

Поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=0,$ то и $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0.$

в) Имеем $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\frac{x}{x+y}}=e.$

Пример 6. Исследовать функцию $z=\frac{\ln(xy+y)+y^2}{\sqrt{x}}$ на непрерывность.

Решение

Область определения частного двух функций есть пересечение областей определения делимого и делителя, из которого удалены точки, в которых делитель обращается в нуль. В данном случае область определения описывается системой неравенств: $\begin{cases}xy+y>0,\\ x>0\end{cases}\sim\begin{cases}x>0,\\ y>0.\end{cases}$

Пример 7. Исследовать функцию $z=\frac{x+y}{x^3+y^3}$ на непрерывность. Найти предел функции в точках разрыва.

Решение

Поскольку числитель и знаменатель – непрерывные функции, то функция имеет разрыв лишь в точках, где знаменатель x^3+y^3 обращается в нуль, т. е. на прямой $y=-x$.

Пусть $x_0\neq 0,$ $y_0\neq 0,$ $x_0+y_0=0,$ тогда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{x+y}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=\frac{1}{x_0^2-x_0y_0+y_0^2}.$$

Значит, точки прямой $y=-x,$ $(x\neq 0)$ – точки устранимого разрыва функции z.

Из соотношения $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{1}{x_0^2-x_0y_0+y_0^2}=+\infty$ следует, что точка O (0; 0) – точка бесконечного разрыва.

Пример 8. Пользуясь определением частных производных, найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = xy^2$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x+\Delta x;\, y) - z(x;\, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)y^2 - xy^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y^2(x+\Delta x - x)}{\Delta x} = y^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x;\, y+\Delta y) - z(x;\, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x(y+\Delta y^2) - xy^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x(y^2 + 2y \cdot \Delta y + \Delta y^2 - y^4)}{\Delta y} = 2xy$$

Пример 9. Найти частные производные следующих функций:

а) $z = x^2 + y^3 + 3x^2y^3$; б) $z = \mathrm{arctg}\frac{y}{1+x^2}$; в) $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{y}{z}}$;

г) $z = \mathrm{tg}\,(x+2y) \cdot e^{\frac{x}{y}}$; д) $u = \left(\frac{y}{x}\right)^z$.

Решение

а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 6xy^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 9x^2y^2$;

б) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{(1+x^2)^2}} \cdot y(-1)(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2xy}{x^4 + 2x^2 + 1 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{(1+x^2)^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2+1}{x^4 + 2x^2 + 1 + y^2};$$

в) $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x}{y^2} + e^{-\frac{y}{z}}\left(-\frac{1}{z}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial z} = e^{-\frac{y}{z}} \cdot \frac{y}{z^2}$;

г) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2(x+2y)} \cdot e^{\frac{x}{y}} + \mathrm{tg}(x+2y) \cdot e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2(x+2y)} \cdot 2e^{\frac{x}{y}} + \mathrm{tg}(x+2y) \cdot e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right);$$

д) $\frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{z-1} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = z \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{z-1} \cdot \frac{1}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{y}{x}\right)^z \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

Пример 10. Найти полные дифференциалы следующих функций:

а) $z = \ln \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$; б) $z = e^x(\cos y + x\sin y)$.

Решение

а) Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{2y}{x^2\sin\frac{2y}{x}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x\sin\frac{2y}{x}}.$$

Следовательно, $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = \dfrac{2}{x\sin\frac{2y}{x}}\left(dy - \dfrac{y}{x}dx\right)$.

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^x(\cos y + x\sin y) + e^x \sin y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^x(-\sin y + x\cos y)$,

$dz = e^x(x\cos y - \sin y)dy + (\sin y + \cos y + x\sin y)dx.$

Дополнительные задачи

1. Определить область определения функций:

а) $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$; б) $z = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

Ответ: а) замкнутый угол, ограниченный лучами $y = x,\ x \ge 0$ и $y = -x,\ x \ge 0$;

б) семейство концентрических колец $2\pi k \le x^2 + y^2 \le \pi(2k+1)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

2. Найти множество значений функции $z = x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y - 3$.

Ответ: $[-4; +\infty)$.

3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{y}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x+y)e^{-(x^2+y^2)}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

Ответ: а) a; б) 0; в) $\sqrt{e}$.

4. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ не существует.

5. Доказать, что функция $\begin{cases} \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$ является непрерывной в точке $O(0;\,0)$.

6. Найти точки разрыва функции $z = \dfrac{1}{\sin x \cdot \sin y}$.

Ответ: $x = k\pi,\ \ y = m\pi,\ \ k, m \in z.$

7. Найти частные производные следующих функций:

а) $z = xy + \dfrac{x}{y}$; б) $z = x\sin(x+y)$; в) $u = x^{\frac{y}{z}}$; г) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Ответ: а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y + \dfrac{1}{y},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x - \dfrac{x}{y^2}$;

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \sin(x+y) + x\cos(x+y),\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x\cos(x+y)$;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{yu}{xz},\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{u\ln x}{z},\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{yu}{z^2}\ln z$;

г) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

8. Найти дифференциалы функций:

а) $z = \ln \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$; б) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z^2}$ в точке $M(3;\,2;\,1)$.

Ответ: а) $\dfrac{2}{x\sin\dfrac{2y}{x}}\left(dy - \dfrac{y}{x}dx\right)$; б) $\dfrac{2dx + 3dy - 12dz}{37}$.