Касательная плоскость и нормаль.

Производные и дифференциалы высших порядков

Пример 1. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\dfrac{x^2-y^2}{2}$ в точке $M_0(3;1;4)$.

Решение

Поверхность S запишем в виде $F(x;y;z)=\dfrac{x^2-y^2}{2}-z=0.$

Построим плоскость, проходящую через точку $M_0(3;1;4)$ и имеющую нормальный вектор $\operatorname{grad}F(3;1;4)$:

$$\operatorname{grad}F(3;1;4)=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}\bar{i}+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}\bar{j}+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}\bar{k}=\left.x\right|_{M_0}\bar{i}-\left.y\right|_{M_0}\bar{j}-1\cdot\bar{k}=3\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}.$$

Запишем уравнение касательной плоскости:

$3(x-3)-(y-1)-(z-4)=0,\quad 3x-y-z-4=0.$

Запишем уравнение нормали: $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-4}{-1}.$

Пример 2. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\ln(e^{xy}+z)=0$ в точке $M_0(0;4;0)$.

Решение

Найдем нормальный вектор плоскости в точке $M_0(0;4;0)$:

$$\operatorname{grad}F(0;4;0)=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}\bar{i}+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}\bar{j}+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}\bar{k}=$$

$$=\left.\left(\frac{1}{e^{xy}+z}\cdot ye^{xy}\right)\right|_{M_0}\bar{i}+\left.\frac{1}{e^{xy}+z}\cdot xe^{xy}\right|_{M_0}\bar{j}+\left.\frac{1}{e^{xy}+z}\right|_{M_0}\bar{k}=4\bar{i}+0\bar{j}+\bar{k}.$$

Уравнение касательной плоскости: $4(x-0)+0(y-4)+1(z-0)=0,\ 4x+z=0.$

Уравнение нормали: $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-4}{0}=\dfrac{z}{1}.$

Пример 3. Найти точку на поверхности $z=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}$, нормаль к которой параллельна прямой $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$, и записать уравнение касательной плоскости к поверхности в этой точке.

Решение

Направляющий вектор нормали к поверхности в произвольной точке $(x; y; z)$ имеет вид $\left(\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}\right)'_x; \left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}\right)'_y; -1\right)=\left(x; \frac{y}{2}; -1\right)$.

По условию нормаль в искомой точке параллельна заданной прямой.

Записывая критерий коллинеарности двух векторов, получаем соотношения: $\frac{x}{1}=\frac{y/2}{-1}=\frac{-1}{1}$. Из этих соотношений находим координаты точки M_0, в которой нормаль параллельна заданной прямой: $x=-1,\ y=2,\ z=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=\frac{3}{2}$.

Запишем уравнение касательной плоскости:

$$(x+1)-(y-2)+\left(z-\frac{3}{2}\right)=0, \text{ или } 2x-2y+2z+3=0.$$

Пример 4. Найти частные производные второго порядка функции $z=x^{y^2}$.

Решение

Сначала находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2\cdot x^{y^2-1};\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^{y^2}\ln x\cdot 2y.$$

Вычисляя частные производные от частных производных первого порядка, получаем частные производные второго порядка данной функции:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\cdot(y^2-1)x^{y^2-2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2yx^{y^2-1}+y^2x^{y^2-1}\ln x\cdot 2y=2yx^{y^2-1}(1+y^2\ln x);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2y^{y^2}\cdot x^{y^2-1}\ln x+2yx^{y^2}\cdot\frac{1}{x}=2yx^{y^2-1}(1+y^2\ln x);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^{y^2}\ln x\cdot 2y\cdot\ln x\cdot 2y+2x^{y^2}\ln x=2x^{y^2}\ln x(1+2y^2\ln x).$$

Замечание. Так как $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ являются непрерывными функциями, то они равны.

Пример 5. Показать, что функция $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Пример 6. Показать, что функция $u = \varphi(x-\alpha t) + \psi(x+\alpha t)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$

Решение

Введем обозначения: $x-\alpha t = \xi,\ \ x+\alpha t = \eta.$

Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi}\cdot 1 + \dfrac{\partial \psi}{\partial \eta}\cdot 1; \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2};$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(-\alpha) + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\cdot\alpha; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\cdot\alpha^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}\cdot\alpha^2.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \alpha^2\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$

Пример 7. Найти $\dfrac{\partial^{10} u}{\partial x^2 \partial y^8}$, если $u = e^{xy}$.

Решение

Указанная частная производная не зависит от порядка дифференцирования.

Очевидно, $\dfrac{\partial^8 u}{\partial y^8} = x^8 e^{xy}.$

Вычисляя теперь по формуле Лейбница вторую производную по x от $\dfrac{\partial^8 u}{\partial y^8}$, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^8 \varphi}{\partial y^8}\right) = \frac{\partial^{10} u}{\partial x^2 \partial y^8} = (x^8)''_{x^2} e^{xy} + 2(x^8)'_x (e^{xy})'_x + x^8 (e^{xy})''_{x^2} =$$

$$= 56x^6 e^{xy} + 16x^7 y e^{xy} + x^8 y^2 e^{xy}.$$

Пример 8. Найти дифференциал второго порядка функции $z = e^{x-y^2} + \cos x$.

Решение

Воспользуемся формулой $d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dxdy + z''_{yy} dy^2$.

Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-y^2} - \sin x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2ye^{x-y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x-y^2} - \cos x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2ye^{x-y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2e^{x-y^2}(1-2y^2).$$

В результате получаем

$$d^2 z = (e^{x-y^2} - \cos x)dx^2 - 4ye^{x-y^2} dxdy + 2e^{x-y^2}(2y^2 - 1)dy^2.$$

Пример 9. Найти $d^3 z$ функции $z = x^3 y$ в точке $M_0(1;1)$.

Решение

Найдем $d^3 z$ с помощью оператора:

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

Найдем частные производные третьего порядка в точке M_0:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6y;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 6x; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0; \quad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right|_{M_0} = 6; \quad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right|_{M_0} = 6.$$

В результате получаем $\left.d^3 z\right|_{M_0} = 6dx^3 + 18dx^2 dy.$

Пример 10. Найти второй дифференциал сложной функции $z = e^u + u$, $u = x^2 + y^2$ в точке $M_0(0;0)$.

Решение

Первый дифференциал этой функции можно найти используя инвариантность формы записи дифференциала.

Имеем $dz = d(e^u + u) = (e^u + 1)\,du$, где $du = d(x^2 + y^2) = 2xdx + 2ydy.$

Дальнейшее дифференцирование дает

$$d^2z = d(e^u+1)du + (e^u+1)d^2u = e^u du^2 + (e^u+1)d(2xdx+2ydy) =$$

$$= e^u(2xdx+2ydy)^2 + (e^u+1)(2dx^2+2dy^2) = (4e^u x^2 + 2e^u + 2)dx^2 +$$

$$+ 8e^u xy\,dx\,dy + (4e^u y^2 + 2e^u + 2)\,dy^2, \text{ где } u = x^2 + y^2.$$

В точке $M_0(0;\,0)$ $\quad d^2z\Big|_{M_0} = 4dx^2 + 4dy^2.$

Дополнительные задачи

1. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

а) $z = (x-y)^2 - x + 2y, \quad M_0(1;\,1;\,1);$ б) $xy^2 + z^3 = 12, \quad M_0(1;\,2;\,2).$

Ответ: а) $x - 2y + z = 0,\ x - 1 = \dfrac{y-1}{-2} = z - 1;$ б) $x + y + 3z = 9,\ x - 1 = y - 2 = \ = \dfrac{z-2}{3}.$

2. Показать, что эллипсоид $4x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$ и гиперболоид $x^2 - y^2 + z^2 = 3$ в точке $M_0(0;\,1;\,2)$ касаются друг друга, т. е. обе поверхности проходят через эту точку и имеют в ней общую касательную плоскость.

3. Для указанных функций найти частные производные второго порядка:

а) $z = \dfrac{x^2 + y^2}{xy};$ б) $z = \sin^2(ax + by).$

Ответ: а) $z''_{xx} = \dfrac{2y}{x^3},\ z''_{xy} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2},\ z''_{yy} = \dfrac{2x}{y^3};$

б) $z''_{xx} = 2a^2\cos 2(ax+by),\ z''_{xy} = 2ab\cos 2(ax+by),\ z''_{yy} = 2b^2\cos 2(ax+by).$

4. Вычислить частные производные второго порядка функции $z = f(x;y),$ в указанных точках:

а) $z = \dfrac{x}{x+y},\ M_0(1;\,0);$ б) $z = \ln(x^2 + y),\ M_0(0;\,1).$

Ответ: а) $z''_{xx}(M_0) = 0,\ z''_{xy}(M_0) = 1,\ z''_{yy}(M_0) = 2;$

б) $z''_{xx}(M_0) = 2,\ z''_{xy}(M_0) = 0,\ z''_{yy}(M_0) = -1.$

5. Найти $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ для сложной функции $u = f\,(x^2 + y^2 + z^2)$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4x^2 f''(x^2 + y^2 + z^2).$

6. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $z = f\,(u;v)$, где $u = x^2 + y^2,\ v = xy.$

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'v(u;v) + 4xy\, f''_{uu}(u;v) + 2(x^2 + y^2)\, f''_{uv}(u;v) + xy\, f''_{uv}(u;v).$

7. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ для функции $u = e^{xyz}$.

Ответ: $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$.

8. Найти $\partial^3 z$ в точке $M_0(0;1)$ для функции $z = e^{x^2 y}$.

Ответ: $\partial^3 z\,(M_0) = 6dx^2 \cdot dy$.

9. Доказать, что функция $u = x\varphi(x+y) + y \cdot \psi(x+y)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.