Дифференцирование неявных функций. Формула Тейлора

Пример 1. Найти производные $f'(x)$ и $f''(x)$ неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ и удовлетворяющей условию $f(1) = 1$.

Решение

Функция $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3$ дифференцируема в любой окрестности точки (1; 1). Производная $F_y' = x + 2y$ непрерывна в точке (1; 1). Наконец, $F(1;1) = 0$, $F_y'(1;1) = 3 \neq 0$, т. е. выполнены все условия существования неявной функции в некоторой окрестности точки (1; 1). Уравнение $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ определяет единственную дифференцируемую неявную функцию $y = f(x)$, причем $f(1) = 1$. Так как $F(x; y)$ дважды дифференцируема, то и $y = f(x)$ также дважды дифференцируема.

Пользуясь формулой $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x'}{F_y'}$, получаем $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x + y}{x + 2y}$, $(x \neq -2y)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+2y)(2+y') - (2x+y)(1+2y')}{(x+2y)^2} = -\frac{18}{(x+2y)^2}, \quad (x \neq -2y).$$

Подставляя в эти равенства $x = 0$, $y = 1$, получаем $y'(1) = -1$, $y''(1) = -2$.

Пример 2. Найти y', y'', y''' при $x = 0, y = 1$, если $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$.

Решение

Трижды продифференцируем неравенство $F(x; y) = 0$:

$$2x - y - xy' + 4yy' + 1 - y' = 0, \quad 2 - 2y' - xy'' + 4y'^2 + 4yy'' - y'' = 0,$$

$-3y'' - xy''' + 12y'y'' + 4yy''' - y''' = 0$ и подставляя в результаты значения $x = 0$, $y = 1$, получаем систему уравнений:

$$3y' = 0,$$
$$2 + 3y'' = 0,$$
$$2 + 3y''' = 0,$$

из которой находим $y' = 0$, $y'' = -\dfrac{2}{3}$, $y''' = -\dfrac{2}{3}$.

Пример 3. Доказать, что уравнение $z^3 - xyz + y^2 - 16 = 0$ определяет в некоторой окрестности точки $(1; 4; 2)$ единственную неявную функцию вида $z = f(x; y)$. Найти ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x}(1; 4)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1; 4)$.

Решение

Функция $F(x; y; z) = z^3 - xyz + y^2 - 16$ дифференцируема в любой окрестности точки $M_0(1; 4; 2)$. Производная $F'_z = 3z^2 - xy$ непрерывна в точке M_0. Наконец, $F(1; 4; 2) = 0$, $F'_z(1; 4; 2) = 8 \neq 0$. Поэтому в некоторой окрестности точки M_0 уравнение $z^3 - xyz + y^2 - 16 = 0$ определяет единственную дифференцируемую неявную функцию $z = f(x; y)$, причем $f(1; 4) = 2$.

Для нахождения $\frac{\partial z}{\partial x}$ воспользуемся формулой $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{yz}{3z^2 - xy}$.

Дифференцируя это равенство по x, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{yz'(3z^2 - xy) - yz(6zz' - y)}{(3z^2 - xy)^2} =$$

$$= \frac{y\frac{y^2}{3z^2 - xy}(3z^2 - xy) - yz\left(6z\frac{yz}{3z^2 - xy} - y\right)}{(3z^2 - xy)^2} = -\frac{2xy^3 z}{(3z^2 - xy)^3}.$$

Если в полученных равенствах положить $x = 1, y = 4, z = 2,$ то получим $z'_x(1; 4) = 1$, $z''_{xx}(1; 4) = 0{,}5$.

Рассмотрим другой способ решения задачи. Предполагая, что функция $z = f(x; y)$ подставлена в уравнение $z^3 - xyz + y^2 - 16 = 0$, продифференцируем дважды полученное тождество по x:

$$3z^2 z'_x - yz - xyz'_x = 0,$$
$$6zz'^2_x + 3z^2 z''_{xx} - 2yz'_x - xyz''_{xx} = 0.$$

Решая эту систему, находим:

$$z'_x = \frac{yz}{3z^2 - xy}; \quad z''_{xx} = -\frac{2xy^3 z}{(3z^2 - xy)^3}.$$

Пример 4. Найти dz, если $\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y} - 1 = 0$.

Решение

Воспользуемся формулой $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$

Найдем частные производные неявно заданной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x}{z^2} - \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{y}} = \frac{z}{x+z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{x}{z^2} - \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{y}} = \frac{z^2}{y(x+z)}.$$

Отсюда $dz = \frac{z}{x+z} dz + \frac{z^2}{y(x+z)} dy, \quad (x \neq -z).$

Рассмотрим другой способ решения задачи. Считая, что $z = z(x, y)$, в результате дифференцирования получаем

$$\frac{zdx - xdz}{z^2} - \frac{y}{z} \cdot \frac{ydz - zdy}{y^2} = 0, \quad yzdx - xydz - yzdz + z^2 dy = 0.$$

Отсюда $dz = \frac{z}{x+z} dz + \frac{z^2}{y(x+z)} dy.$

Пример 5. Функцию $f(x; y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (–2; 1).

Решение

Данная функция имеет непрерывные частные производные любого порядка. Поскольку все частные производные порядка выше второго равны нулю, то остаточный член R_n при $n \geq 2$ обращается в нуль и формула Тейлора принимает следующий вид:

$$f(x; y) = f(-2;1) + \frac{\partial f(-2;1)}{\partial x}(x+2) + \frac{\partial f(-2;1)}{\partial y}(y-1) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(-2;1)}{\partial x^2}(x+2)^2 + 2\frac{\partial^2 f(-2;1)}{\partial x \partial y}(x+2)(y-1) + \frac{\partial^2 f(-2;1)}{\partial y^2}(y-1)^2 \right).$$

Находим значение функции и ее частные производные в точке $M_0(-2;1)$:

$$f(-2;1) = 1; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.-2x + 2y - 6\right|_{M_0} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.2x + 6y - 2\right|_{M_0} = 0; \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} = -2;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = 2; \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0} = 6;$$

Получаем $f(x;y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2.$

Пример 6. Разложить функцию $f(x;y) = e^{\frac{x}{y}}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(0;1)$ до членов второго порядка включительно. Записать остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано.

Решение

Найдем значение функции и ее частные производные до второго порядка включительно в точке $M_0(0;1)$:

$$f(M_0) = 1; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = \left. e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}\right|_{M_0} = 1;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = \left. e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right|_{M_0} = 0; \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} = \left. e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y^2}\right|_{M_0} = 1;$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = \left.\left(e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^3}\right) + e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right)\right|_{M_0} = -1;$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0} = \left.\left(e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x^2}{y^4} + e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{2x}{y^3}\right)\right|_{M_0} = 0.$$

Подставляя эти значения в формулу Тейлора, получаем

$$e^{\frac{x}{y}} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x(y-1) + R_2.$$

В форме Пеано: $R_2 = o(x^2 + (y-1)^2).$

Пример 7. Пусть z – та неявная функция от x и y, определяемая уравнением $z^3 - 2xz + y = 0$, которая при $x = 1$ и $y = 1$ принимает значение $z = 1$. Разложить эту функцию в окрестности точки $M_0(1;1)$ по формуле Тейлора до членов второго порядка включительно.

Решение

Находим частные производные функции в точке $M_0(1;1)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-2z;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=1;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-2x;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=\left.\frac{2z}{3z^2-2x}\right|_{M_0}=2;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=-\left.\frac{1}{3z^2-2x}\right|_{M_0}=-1;\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}=\left.\frac{2z'_x(3z^2-2x)-2z(6z\cdot z'_x-2)}{(3z^2-2x)^2}\right|_{M_0}=-16;$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}=(3z^2-2x)^{-2}\cdot 6z\cdot z'_y\Big|_{M_0}=-6;\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{M_0}=(3z^2-2x)^{-2}(6z\cdot z'_x-2)\Big|_{M_0}=10;$$

Подставляя эти значения в формулу Тейлора, получаем

$$f(x;y)=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+\ldots .$$

Дополнительные задачи

1. Найти производные $f'(0)$ и $f''(0)$ неявной функции $y=f(x)$, заданной уравнением $x^2-xy+2y^2+x-y-1=0$ и удовлетворяющей условию $f(0)=1$.

Ответ: $f'(0)=0,\quad f''(0)=-\dfrac{2}{3}.$

2. Найти первую и вторую производные неявной функции вида $y=f(x)$, заданной уравнением $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Ответ: $y'=\dfrac{x+y}{x-y},\ \ y''=\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$

3. Найти частные производные первого и второго порядков неявной функции вида $z=f(x;y)$ заданной уравнением $x+y+z=e^z$.

Ответ: $z'_x=z'_y=\dfrac{1}{e^z-1},\ \ z''_{xx}=z''_{xy}=z''_{yy}=\dfrac{-e^z}{(e^z-1)^3}$.

4. Для функции $z=z(x;y)$ найти частные производные первого и второго порядков, если $z^3-3xyz=a^3$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{z^2-xy};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{z^2-xy};\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3};$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(z^4-2z^2xy-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2yx^3z}{(z^2-xy)^3}.$$

5. Функцию $f(x;y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ разложить по формуле Тейлора в

окрестности точки $A(1;-2)$.

Ответ: $f(x;y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$.

6. Разложить функцию $z=\ln(1+x+y)$ с центром разложения в точке $M_0(0;0)$ до членов третьего порядка.

Ответ: $\ln(1+x+y)=x+y-\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{3}(x+y)^3+0((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}})$.

7. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (1; 1) до членов второго порядка включительно неявную функцию $z(x;y)$, определяемую уравнением $z^3+3yz-4x=0$, если $z(1;1)=1$.

Ответ: $z=1+\frac{2}{3}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{2}{9}(x-1)^2-\frac{1}{8}(y-1)^2+\dots$.