Локальный экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум

Пример 1. Исследовать по определению на экстремум функции:

а) $z=(x+4)^6-(y-2)^8$, $M_0(-4;2)$;

б) $z=(x-3)^4+(y+5)^6$, $M_0(3;-5)$.

Решение

а) Пусть $x+4=X$, $y-2=Y$, $z=Z$.

Имеем $z=X^6-Y^8$, $M_0(0;0)$, $Z(0;0)=0$.

Находим $\Delta Z=Z(X;Y)-Z(0;0)=X^6-Y^8$.

Далее при $X\neq 0$ $Y=0, \Delta Z>0$, а при $X=0$ $Y\neq 0, \Delta Z<0$.

Следовательно, функция $z=(x+4)^6-(y-2)^8$ в точке $M_0(-4;2)$ не имеет экстремума.

б) Пусть $x-3=X$, $y+5=Y$, $z=Z$. Имеем $z=X^4+Y^6$, $M_0(0;0)$. Находим $\Delta Z=Z(X;Y)-Z(0;0)=X^4+Y^6$. Так как $\Delta Z>0$, то точка $M_0(3;-5)$ является точкой локального минимума.

Пример 2. Найти точки локального экстремума функции $z=x^2-2xy+4y^3$.

Решение

Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-2y=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-2x+12y^2=0.\end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем две точки возможного экстремума $M_1(0;0)$ и $M_2\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{6}\right)$.

Далее находим производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=24y.$$

В точке M_1: $a_{11}=2$, $a_{12}=-2$, $a_{22}=0$, $D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=-4<0$ и экстремума нет.

В точке M_2: $a_{11}=2,\ a_{12}=-2,\ a_{22}=4,\quad D=2\cdot 4-(-2)^2=4>0$ и так как $a_{11}=2>0,$ то в точке M_2 функция имеет локальный минимум.

Пример 3. Найти точки локального экстремума функции $z=3x^2y-x^3-y^4.$

Решение

Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-3x^2+6xy=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=3x^2-4y^3=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим две точки возможного экстремума $M_1(0;0)$ и $M_2(6;3)$. Вычисляем частные производные второго порядка данной функции:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-6x+6y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-12y^2.$$

В точке M_1: $a_{11}=0,\ a_{12}=0,\ a_{22}=0.$ Точка $M_1(0;0)$ требует дополнительного исследования. Находим $z(0;0)=0.$

Далее при $x<0,\ y=0$ имеем $z(x;y)>0,$ а при $x=0\ \ y\neq 0\ \ z(x;y)==-y^4<0.$ Следовательно, в любой окрестности точки $M_1(0;0)$ функция $z(x;y)$ принимает значения как больше $z(0;\,0),$ так и меньше $z(0;\,0).$ Следовательно, в точке $M_1(0;0)$ функция $z(x,y)$ не имеет локального экстремума.

В точке M_2: $a_{11}=-18,\ a_{12}=36,\ a_{22}=-108$ и, значит, $D=648>0.$ Так как $a_{11}<0$, то в точке M_2 функция имеет локальный максимум.

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию $z=1-\sqrt{x^2+y^2}.$

Решение

Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.\end{cases}$$

На всей плоскости, за исключением точки $O(0;\,0),$ частные производные непрерывны и отличны от нуля.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_O = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(\Delta x;0)-z(0;0)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Этот предел не существует. Аналогично не существует $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_O$.

Точка $O(0;0)$ является критической, а значит, подозрительной на экстремум. Значение $z(0;0)=1$; $z(x;y)-z(0;0)=-\sqrt{x^2+y^2}<0$. Точка $O(0;0)$ является точкой максимума $z_{\max}=1$.

Пример 5. Исследовать на локальный экстремум функцию

$u = x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z.$

Решение

Из системы $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2=0,\\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y+4=0,\\ \frac{\partial u}{\partial z}=2z-6=0\end{cases}$ определяем единственную стационарную точку $M(-1;-2;3)$.

Находим вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0.$$

Таким образом, $\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4>0$, $\Delta_3=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=8>0.$

Второй дифференциал d^2u, согласно критерию Сильвестра, представляет собой положительно определенную квадратичную форму. Следовательно, в точке (–1; –2; 3) функция имеет минимум $(u_{\min}=-14)$.

Эту задачу можно решить методом выделения полных квадратов:

$u = x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z=(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2-14.$

Точка $M(-1;-2;3)$ является точкой минимума $(u_{\min}=-14)$.

Пример 6. Исследовать на экстремум функцию $u=2x^2+y^2+2z-xy-xz.$

Решение

Находим стационарные точки функций:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x - y - z = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y - x = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 2 - x = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим единственную стационарную точку $M_0(2;1;7)$.

Эта точка является точкой возможного экстремума. Проверим выполнение достаточных условий экстремума. Находим частные производные второго порядка в точке $M_0(2;1;7)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x^2}\right|_{M_0} = 4, \ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_0} = 2, \ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{M_0} = 0, \ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = -1, \ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right|_{M_0} = -1, \ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right|_{M_0} = 0.$$

Второй дифференциал функции $\left. d^2 u\right|_{M_0} = 4dx^2 + 2dy^2 - 2dxdy - 2dxdz$.

Нетрудно видеть, что эта квадратичная форма – знакопеременная.

Действительно, если положить $dy = dz = 0, dx \neq 0$, то получим $\left. d^2 u\right|_{M_0} = 4dx^2 > 0$, а если положить $dy = 0, \ dx \neq 0$ и $dz = 3dx$, то получим $\left. d^2 z\right|_{M_0} = -2dx^2 < 0$.

Следовательно, в точке M_0 функция $u(x;y;z)$ не имеет локального экстремума. ▲

Пример 7. Найти точки локального экстремума функции

$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$.

Решение

Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x - y + 2z = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -x - 1 + 3y^2 = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 2x + 2z = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим две точки возможного экстремума: $M_1\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ и $M_2\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$.

Далее воспользуемся достаточными условиями экстремума. Для этого вычислим частные производные второго порядка данной функции:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-1,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=2,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2.$$

Матрица квадратичной формы $d^2u\Big|_{M_1}$ имеет вид $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ -1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Выделяя главные миноры матрицы A, получаем:

$$\Delta_1=4>0,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix}4 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=15>0,\ \ \Delta_3=\begin{vmatrix}4 & -1 & 2\\ -1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=14>0.$$

Согласно критерию Сильвестра, $d^2u\Big|_{M_1}$ является положительно определенной квадратичной формой от переменных $dx, dy, dz.$ Следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный минимум.

Исследуем точку M_2. Матрица квадратичной формы $d^2u\Big|_{M_2}$ имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ -1 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем: $\Delta_1=4>0,\ \ \Delta_2=-13<0,\ \ \Delta_3=-14<0.$

Следовательно, $d^2u\Big|_{M_2}$ не является знакоопределенной квадратичной формой от $dx, dy, dz.$ Покажем, что эта квадратичная форма знакопеременная:

$$d^2u\Big|_{M_2}=4dx^2-2dxdy+4dxdz-3dy^2+2dz^2.$$

Если положить $dx \neq 0, dy = dz = 0,$ то получим $d^2u\Big|_{M_2} = 4dx^2 > 0,$ а если положить $dx = dz = 0, dy \neq 0$, то получим $d^2u\Big|_{M_2} = -3dy^2 < 0.$

Следовательно, в точке M_2 функция не имеет локального экстремума.

Пример 8. Найти экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2$ при условии $x + 2y = 1.$

Решение

Из уравнения связи $x + 2y = 1$ выразим x через y и подставим в выражение для данной функции:

$$x = 1 - 2y,\ \ z = (1-2y)^2 + (1-2y)y + y^2 = 1 - 4y + 4y^2 + y - 2y^2 + y^2 = 3y^2 - 3y + 1$$

Функция $z = 3y^2 - 3y + 1$ достигает локального минимума в точке $y = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2},\ \ x = 0.$

Тогда условный минимум равен $z_{\min} = 3 \cdot \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{6}{4} + \dfrac{4}{4} = \dfrac{1}{4}.$

Таким образом, в точке $M\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ функция $z = x^2 + xy + y^2$ имеет условный минимум, равный $\dfrac{1}{4}.$

Пример 9. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ найти точки M_3 и M_4, сумма квадратов расстояний от которых до заданных точек $M_1(-6; 4; 17)$ и $M_2(-2; -4; 15)$ была соответственно наименьшей и наибольшей.

Решение

По условию задачи требуется найти точки, для которых функция $u = (x+6)^2 + (y-4)^2 + (z-17)^2 + (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-15)^2$ при ограничении $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ имеет экстремум.

1. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x; y; z; \lambda) = (x+6)^2 + (y-4)^2 + (z-17)^2 + (x+2)^2 + (y+4)^2 +$$
$$+ (z-15)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

2. Находим стационарные точки функции Лагранжа, т. е. решаем систему уравнений:

$$L'_x = 4x + 16 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{\lambda + 2};$$

$$L'_y = 4y + 2\lambda y = 0 \Rightarrow y = 0;$$

$$L'_z = 4z - 64 + 2\lambda z = 0 \Rightarrow z = \frac{32}{\lambda + 2};$$

$$L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \pm 8\sqrt{17}.$$

Имеем две стационарные точки $M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}; 0; \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$ и $M_4\left(\frac{1}{\sqrt{17}}; 0; -\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$.

Из геометрического смысла задачи следует, что она имеет хотя бы одно решение. Следовательно, эти точки будут искомыми.

Очевидно, что $|M_1M_3|^2 + |M_2M_3|^2 < |M_1M_4|^2 + |M_2M_4|^2$.

Таким образом, наименьшее значение функции u достигается в точке $M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}; 0; \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$, а наибольшее – в точке $M_4\left(\frac{1}{\sqrt{17}}; 0; -\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$.

Пример 10. Найти условный экстремум функции $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

Решение

Составим функцию Лагранжа $F(x; y; \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$ и рассмотрим систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2 + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Она имеет два решения: $\left(1; 2; -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-1; -2; \frac{1}{2}\right)$.

Следовательно, функция $z = x + 2y$ имеет две критические точки $P_1(1; 2)$ при $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ и $P_2(-1; -2)$ при $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

Найдем знак d^2F в каждой точке при соответствующем ей значении λ:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2.$$

Так как $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda,$ то $d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$

При $x_1 = 1,\ y_1 = 2,\ \lambda_1 = -\dfrac{1}{2}\ \ d^2F < 0,$ следовательно, в точке P_1 функция z имеет максимум $z_{\max} = 5.$

При $x_1 = -1,\ y_1 = -2,\ \lambda_1 = \dfrac{1}{2}\ \ d^2F > 0,$ следовательно, в точке P_2 функция z имеет минимум $z_{\min} = -5.$

Пример 11. Найти экстремальные значения функции $u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ при наличии связи $x + y + z + t + 1 = 0.$

Решение

Составим функцию Лагранжа: $F = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + \lambda\,(x + y + z + t + 1).$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t} = 2t + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z + t + 1 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -\dfrac{\lambda}{2}, \\ y = -\dfrac{\lambda}{2}, \\ z = -\dfrac{\lambda}{2}, \\ t = -\dfrac{\lambda}{2}, \\ -2\lambda + 1 = 0 \end{cases} \sim\ \lambda = \frac{1}{2},\ x = y = z = t = -\frac{1}{4}.$$

Функция $u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ имеет единственную критическую точку $P_1\left(-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{4}\right)$ при $\lambda = \dfrac{1}{2}.$

Поскольку второй дифференциал функции Лагранжа, равный $d^2F = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2),$ всегда положительно определен, то функция $u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ при наличии связи $x + y + z + t + 1 = 0$ имеет в точке $P\left(-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{4}\right)$ условный минимум. Подставляя координаты точки P в функцию u, мы получим $u_{\min} = \dfrac{1}{4}.$

Пример 12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, если $x^2 + y^2 \le 25$.

Решение

Функция z непрерывна в замкнутой ограниченной области. Поэтому, согласно теореме Вейерштрасса, она в этой области достигает наибольшее и наименьшее значения.

Найдем критические точки функции z, принадлежащие области $x^2 + y^2 < 25$.

Поскольку система уравнений $\begin{cases} z'_x = 2x - 12 = 0, \\ z'_y = 2y + 16 = 0 \end{cases}$ в указанной области не имеет решений, то своего наибольшего и наименьшего значений функция z достигает на окружности $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

Составляя функцию Лагранжа $F = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25) = 0$ и решая систему

$$\begin{cases} F'_x = 2x - 12 + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = 2y + 16 + 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 25 = 0, \end{cases}$$

находим две точки возможного условного экстремума $M_1(3;-4)$ и $M_2(-3;4)$.

Вычисляя значения функции z в этих точках $z(M_1) = -75$, $z(M_2) = 125$, заключаем, что $z_{\text{наиб}} = 125$, $z_{\text{наим}} = -75$.

Пример 13. При каких значениях радиуса основания R и высоты H цилиндрическая банка, объем которой равен 54π, имеет наименьшую поверхность?

Решение

Требуется исследовать на экстремум функцию $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$ при наличии связи $\pi R^2 H = 54\pi$.

Составим функцию Лагранжа $F = 2\pi R^2 + 2\pi RH + \lambda(R^2 H - 54)$ и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial R} = 4\pi R + 2\pi H + 2RH\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial H} = 2\pi R + \lambda R^2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = R^2 H - 54 = 0. \end{cases}$$

Так как $R \neq 0,$ система имеет единственное решение $R = 3, H = 6$ при $\lambda = -\frac{2\pi}{3}.$

Из геометрического смысла задачи следует, что она имеет хотя бы одно решение. Поэтому решение $R = 3, H = 6$ является искомым.

Пример 14. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 4.$

Решение

Найдем критические точки функции z, лежащие внутри заданной области:

$$\begin{cases} z'_x = 6x^2 + 8x - 2y = 0, \\ z'_y = 2y - 2x = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем две критические точки $O(0;0)$ и $M(-1;-1)$, из которых ни одна не лежит внутри заданной области (рис. 21). Найдем $z(A)$ и $z(B)$:

$$z(A) = -16 + 16 + 16 + 16 = 32, \quad z(B) = 16 + 16 + 16 - 16 = 32.$$

Найдем критические точки, принадлежащие параболе *AOB*.

Имеем: $y = x^2,$ $z_1(x) = x^4 + 4x^2,$ $x \in (-2;2);$ $z_1' = 4x^3 + 8x;$ $z_1' = 0$ при $x = 0;$ $z_1(0) = z(0;0) = 0.$

На промежутке *AB* имеем

$$y = 4, \ z_2(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16, \ x \in (2;2).$$

Найдем критические точки, принадлежащие этому участку: $z_2'(x) = 6x^2 + 8x - 8.$ Внутри данного отрезка имеется одна критическая точка $x = \frac{2}{3},$ $y = 4$ (точка *C*):

$$z_2\left(\frac{2}{3}\right) = z\left(\frac{2}{3};4\right) = 16\frac{22}{27}.$$

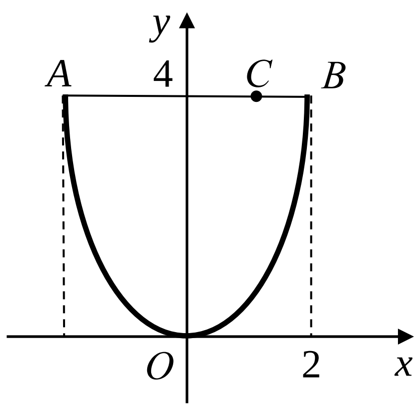

Рис. 1

Таким образом, наибольшее значение функции z равно 32 и достигается оно в т. $A(-2;4)$ и $B(2;4)$, а наименьшее значение равно нулю в т. $O(0;0)$.

Дополнительные задачи

1. Исследовать по определению на экстремум функцию

$$z = 3 + (4x - x^2 - 4)^7 + (\cos y - 1)^5 \text{ в точке } M_0(2;0).$$

Ответ: точка $M_0(2;0)$ является точкой локального максимума, $z_{\max} = z(2;0) = 3.$

2. Исследовать на локальный экстремум функцию $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Ответ: $z_{\min} = z(2;1) = -28$, $z_{\max} = z\ (-2;-1) = 28$.

3. С помощью критерия Сильвестра исследовать на экстремум функцию $u = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2$.

Ответ: $z_{\max} = z(-3;2;-1) = 22$.

4. Для функции $z = 3x^2y - x^3 - y^4$ проверить выполнение достаточных условий локального экстремума в стационарных точках $M_1(6;3)$ и $M_2(0;0)$.

Ответ: в точке $M_1(6;3)$ функция $z(x;\ y)$ имеет локальный максимум, в точке $M_2(0;0)$ функция $z(x;\ y)$ не имеет локального экстремума.

5. Методом исключения части переменных найти экстремум функции $u = x + y + z^2$ при условиях связи $\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$

Ответ: $u_{\min} = u(-1;1;0) = 0$.

6. Найти условный экстремум функции $z = 6 - 4x - 3y$ при $x^2 + y^2 = 1$.

Ответ: $z_{\min} = z\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right) = 1$; $z_{\max} = z\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right) = 11$.

7. Найти условный экстремум функции $u = x - 2y + 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Ответ: $u_{\min} = u\ (-1;\ 2;-2) = -9$; $u_{\max} = u\ (1;-2;2) = 9$.

8. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением, поверхность которой равна 3π м^2 имеет наибольшую вместимость.

Ответ: $V = \pi$ м^3, $R = 1$ м, $l = 2$ м.

9. На заданной плоскости $3x - 2y = 0$. Найти точку, сумма квадратов расстояний которой до точек $A(0;\ 2;\ 5)$ и $B(7;\ 2;\ 1)$ наименьшая.

Ответ: $M(2;\ 3;\ 3)$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = -x^3 + y^3 + 3xy + 2$ в треугольнике с вершинами $A(0;\ 0)$, $B(-3;\ 0)$, $C(0;\ 3)$.

Ответ: $z_{\max} = z(0;\ 3) = z(-3;\ 0) = 29$; $z_{\min} = z(-1;1) = 1$.