Двойные интегралы. Приложения двойных интегралов

Пример 1. Пользуясь определением двойного интеграла, вычислить

$$I = \iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 2}} xy^2\,dxdy.$$

Решение

Разобьем область интегрирования на элементарные ячейки соответственно прямыми $x=\dfrac{k}{n},\ y=\dfrac{2l}{n}\ \ (k, l = 1, 2, \ldots, n-1).$

При таком разбиении площади всех элементарных ячеек равны между собой и составляют $\dfrac{2}{n^2}$. При составлении интегральной суммы значения функции xy^2 будем брать в правой верхней вершине прямоугольника. Тогда

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{2}{n^2}\cdot\frac{4kl^2}{n^3}=\frac{8}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k\sum_{l=1}^{n}l^2.$$

Как известно, $1+2+\ldots+n=\dfrac{(n+1)n}{2},\ \ 1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Отсюда $I=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2(n+1)^2(2n+1)}{6\cdot 2n^5}=\dfrac{4}{3}.$

Пример 2. Оценить интеграл $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 100}\dfrac{dxdy}{100+\cos x+\sin^2 y}.$

Решение

Определим наибольшее и наименьшее значения функции в области интегрирования:

$$M=\max\left(\frac{1}{100+\cos x+\sin^2 y}\right)=\frac{1}{99},\ \ m=\min\left(\frac{1}{100+\cos x+\sin^2 y}\right)=\frac{1}{102}.$$

Площадь интегрирования $S=100\pi.$

Поэтому

$$\frac{100\pi}{102}\le I\le\frac{100\pi}{99},\quad 3{,}08\le I\le 3{,}17.$$

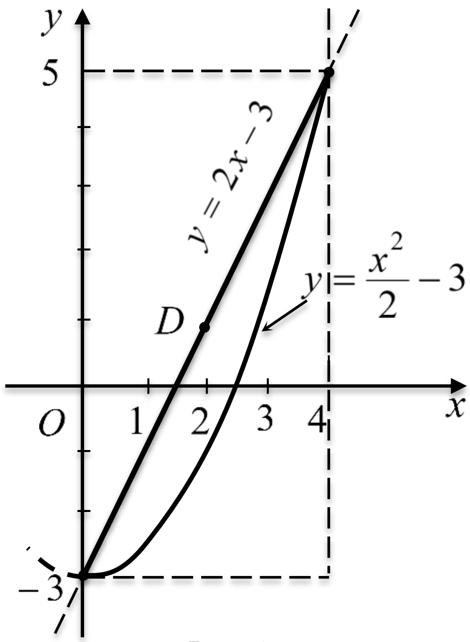

Рис. 1

Пример 3. На плоскости Oxy построить область интегрирования D по заданным пределам изменения переменных в повторном интеграле $I=\int_0^4 dx\int_{\frac{x^2}{2}-3}^{2x-3}dy$ и вычислить этот интеграл.

Решение

Область интегрирования D расположена между прямыми $x=0$ и $x=4$, снизу ограничена параболой $y=\frac{x^2}{2}-3$, сверху – прямой $y=2x-3$ (рис. 1).

Следовательно,

$$I=\int_0^4 dx\int_{\frac{x^2}{2}-3}^{2x-3}dy=\int_0^4\left(y\Big|_{y=\frac{x^2}{2}-3}^{y=2x-3}\right)dx=\int_0^4\left(2x-3-\left(\frac{x^2}{2}-3\right)\right)dx=\int_0^4\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$=\left(x^2-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^4=16-10\frac{2}{3}=5\frac{1}{3}.$$

Пример 4. Представить двойной интеграл $I=\iint_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если известно, что область интегрирования D:

а) ограничена прямыми $x=1,\ x=4,\ x-y+5=0,\ x-y=0;$

б) треугольник с вершинами $O(0;0),\ A(2;1),\ B(3;-2);$

в) внутренняя область эллипса

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1;$

г) круговое кольцо $1\le x^2+y^2\le 4$.

Решение

а) Построим область интегрирования D (рис. 2). Она представляет собой параллелограмм $ABCD$. Из уравнения стороны BC $x-y+5=0$ получаем $y=x+5$, а из уравнения стороны AD $x-y=0$

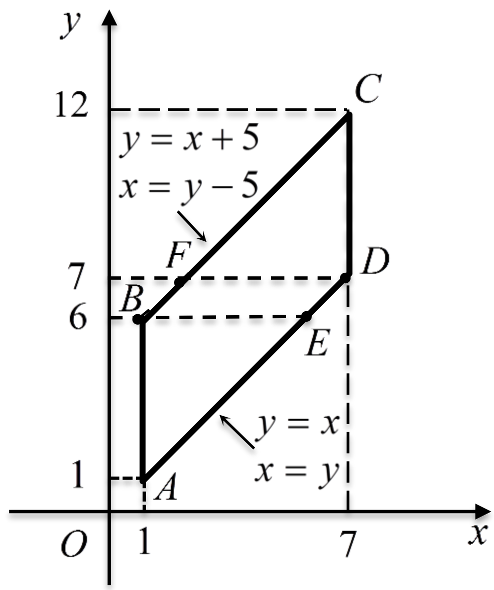

Рис. 2

получаем $y = x$.

Следовательно, $I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_1^7 dx \int\limits_x^{x+5} f(x, y)dy$.

Если изменить порядок интегрирования, то область *D* необходимо рассматривать как объединение трех областей: треугольников *ABE*, *CDF* и параллелограмма *BFDE*. Это вызвано тем, что нельзя записать границу *ABC* и границу *ADC*.

Из уравнения стороны *BC* получаем $x = y - 5$, а из уравнения стороны *AD* получаем $x = y$.

Тогда

$$I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{ABE} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{BFDE} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{CDF} f(x, y)dxdy =$$

$$= \int\limits_1^6 dy \int\limits_1^y f(x, y)dx + \int\limits_6^7 dy \int\limits_{y-5}^{y} f(x, y)dx + \int\limits_7^{12} dy \int\limits_{y-5}^{12} f(x, y)dx.$$

б) Область интегрирования *D* изображена на рис. 3. Находим уравнения прямых *OA*, *AB* и *OB*, на которых расположены стороны треугольника. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

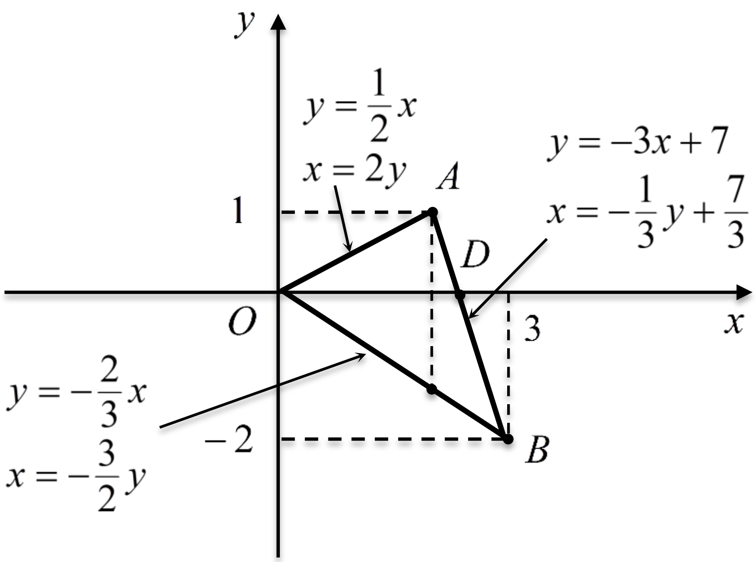

Рис. 3

Для стороны *OA* имеем $\dfrac{x - 0}{2 - 0} = \dfrac{y - 0}{1 - 0}$.

Следовательно, уравнение прямой *OA* имеет вид $y = \dfrac{1}{2}x$ или $x = 2y$.

Аналогично, прямая *AB* задается уравнением $y = -3x + 7$ или $x = -\dfrac{1}{3}y + \dfrac{7}{3}$, а прямая *OB* – уравнением $y = -\dfrac{2}{3}x$ или $x = -\dfrac{3}{2}y$.

Так как верхняя граница области интегрирования *D* состоит из отрезков двух прямых, задаваемых различными уравнениями, то область *D* следует разбить прямой $x = 2$ на два треугольника: *OAC* и *CAB*. Тогда

$$I=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{OAC} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{CAB} f(x,y)dxdy=$$

$$=\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{-\frac{2}{3}x}^{\frac{1}{2}x} f(x,y)dy+\int\limits_{2}^{3}dx\int\limits_{-\frac{2}{3}x}^{-3x+7} f(x,y)dy\,.$$

Если изменить порядок интегрирования, то область D следует рассматривать как совокупность треугольников OAD и OBD:

$$I=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{OAD} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{OBD} f(x,y)dxdy=$$

$$=\int\limits_{-2}^{0}dy\int\limits_{-\frac{3}{2}y}^{-\frac{1}{3}y+\frac{7}{3}} f(x,y)dx+\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{2y}^{-\frac{1}{3}y+\frac{7}{3}} f(x,y)dx\,.$$

в) Уравнение $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ задает эллипс с центром в начале координат, фокусы которого расположены на оси Ox и который имеет полуоси 3 и 2 (рис. 4).

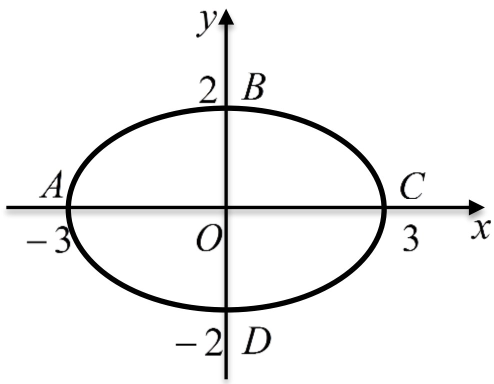

Рис. 4

Верхняя граница области интегрирования – дуга ABC, уравнение которой $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$. Нижняя граница – дуга ADC, задается уравнением $y=-\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$.

Следовательно, $I=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy\,.$

Запишем двойной интеграл в виде повторного с внешним интегрированием по y. В этом случае область интегрирования D ограничена справа дугой DCB, уравнение которой $x=\dfrac{3}{2}\sqrt{4-y^2}$, а слева – дугой DAB с уравнением $x=-\dfrac{3}{2}\sqrt{4-y^2}$.

Поэтому

$$I=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{-\frac{3}{2}\sqrt{9-y^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx.$$

г) Кольцо $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ образовано двумя концентрическими окружностями радиусами 1 и 2 с центром в начале координат (рис. 5). Вертикальные касательные *BL* и *DF*, проведенные в точках *M* (–1;0) и *N* (1;0) к окружности $x^2 + y^2 = 1$, разбивают кольцо на области *ABL*, *MBCDNR*, *MLKFNS*, *EDF*. Дуги *AB*, *BD*, *DE* задаются уравнением $y = \sqrt{4 - x^2}$; дуги *AL*, *LF*, *FE* задаются уравнением $y = -\sqrt{4 - x^2}$; дуга *MRN* задается уравнением $y = \sqrt{1 - x^2}$; дуга *MSN* задается уравнением $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

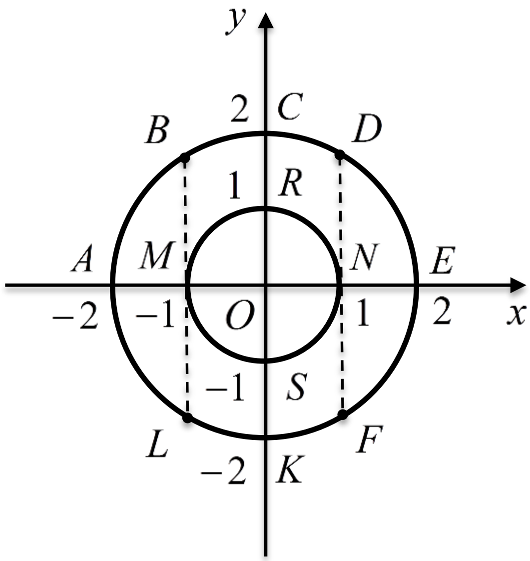

Рис. 5

Таким образом,

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{1} dx \left(\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy \right) + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$$

При изменении порядка интегрирования получаем аналогичное выражение формальной заменой x на y и y на x (за исключением выражения функции $f(x,y)$).

Пример 5. Вычислить повторные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^x \cos(x+y)dy$;   б) $\int\limits_0^{\sin 2} du \int\limits_0^u \frac{uv}{\sqrt{u^2 - v^2}} dv$.

Решение

$$\text{а) } \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^x \cos(x+y)dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^x \cos(x+y)d(x+y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\Big|_{y=0}^{y=x} dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \sin x)dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0;$$

$$\text{б) } \int\limits_0^{\sin 2} du \int\limits_0^u \frac{uv}{\sqrt{u^2 - v^2}} dv = -\frac{1}{2} \int\limits_0^{\sin 2} u du \int\limits_0^u (u^2 - v^2)^{-\frac{1}{2}} d(u^2 - v^2) =$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2\int\limits_0^{\sin 2} u\sqrt{u^2-v^2}\Big|_{v=0}^{v=u} du=-\int\limits_0^{\sin 2}(-u|u|)\,du=\int\limits_0^{\sin 2}u^2du=\frac{u^3}{3}\Big|_0^{\sin 2}=\frac{1}{3}\sin^3 2.$$

Пример 6. Вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_D \frac{xdxdy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ по прямоугольной области D: $0\le x\le 1$; $0\le y\le 1$.

Решение

С целью упрощения вычислений здесь целесообразно записать внутренний интеграл по переменной x:

$$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1\frac{xdx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}d(1+x^2+y^2)=$$

$$=-\int\limits_0^1\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_{x=0}^{x=1}dy=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{y^2+2}}\right)dy=$$

$$=\ln\left|\frac{y+\sqrt{y^2+1}}{y+\sqrt{y^2+2}}\right|\Bigg|_0^1=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

Пример 7. Изменить порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

а) $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^{\frac{2}{3}}}f(x;y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}}f(x;y)dy$;

б) $I=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}}f(x;y)dy$;

в) $I=\int\limits_{-2}^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x;y)dy$;

г) $I=\int\limits_1^4 dy\int\limits_{\frac{1}{y}}^{\sqrt{y}}f(x;y)dx.$

Решение

а) В первом интеграле x изменяется от 0 до 1, а y от прямой $y=0$ до кривой $y=x^{\frac{2}{3}}$, во втором интеграле x изменяется от 1 до 2, а y от прямой $y=0$ до кривой $y=1-\sqrt{4x-x^2-3}$. Область интегрирования изобразим на чертеже (рис. 6).

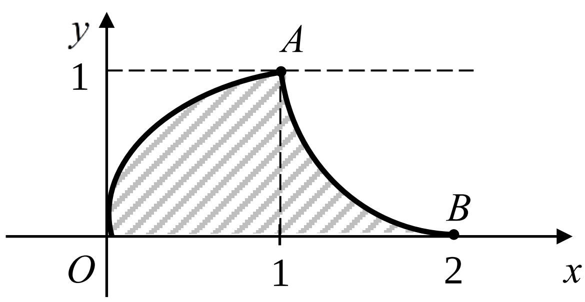

Рис. 6

Разрешим уравнения кривых OA и AB относительно переменной x:

$$y = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = y^{\frac{3}{2}}; \ y = 1 - \sqrt{4x - x^2 - 3} \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 - \sqrt{2y - y^2}.$$

Следовательно, $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^{\frac{3}{2}}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x;y)\,dx.$

б) Изобразим область интегрирования на чертеже (рис. 7).

Если к полуокружности $y = \sqrt{2x - x^2}$ провести касательную, параллельную оси Ox, то она разобьет данную область на три части: OAB, BDK и ACD.

Разрешим уравнения кривых OA, AC и BK относительно переменной x:

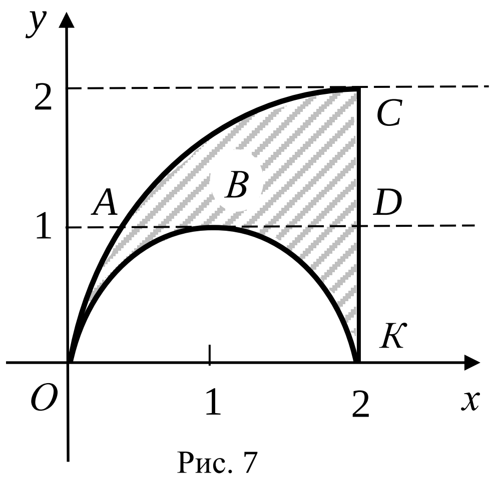

Рис. 7

OA и AC: $y = \sqrt{2x} \Rightarrow x = \frac{1}{2}y^2;$

OB: $y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$ $(x \le 1);$

BK: $y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{1 - y^2}$ $(x \ge 1).$

Уравнение прямой KC имеет вид $x = 2$. В областях OAB и BDK y изменяется от 0 до 1, а в области ACD – от 1 до 2.

Таким образом,

$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x;\,y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x;y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{2} f(x;y)\,dx.$$

в) По пределам интегрирования повторного интеграла восстановим область интегрирования D. Границы искомой области задаются уравнениями:

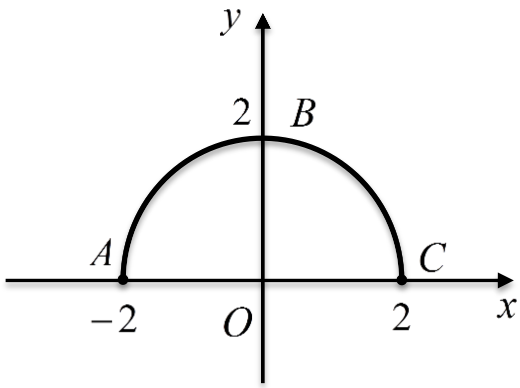

Рис. 8

$$x = -2; \ x = 2; \ y = 0; \ y = \sqrt{4 - x^2}.$$

Область интегрирования представлена на рис. 8.

Разрешим уравнение кривой ABC относительно переменной x:

$x=-\sqrt{4-y^2}$ $(x\le 0)$, $x=\sqrt{4-y^2}$ $(x\ge 0)$. Следовательно, $I=\int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)dx.$

г) Область интегрирования D имеет следующие границы: $y=1$; $y=4$; $x=\dfrac{1}{y}$; $x=\sqrt{y}$ (рис. 9).

При изменении порядка интегрирования разобьем область D прямой $x=1$ на две области: ABN и NBC.

Разрешим уравнения кривых AB и BC относительно переменной y:

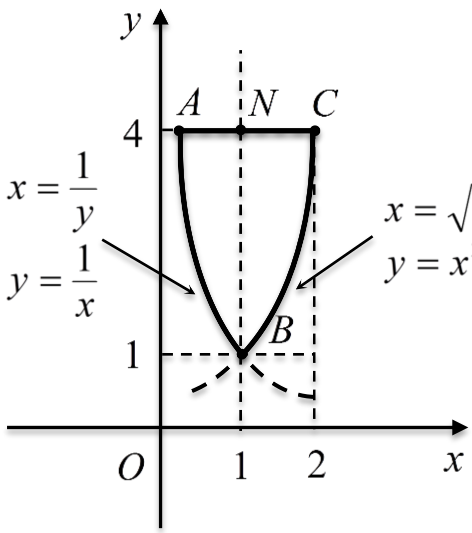

Рис. 9

AB: $x=\dfrac{1}{y} \Rightarrow y=\dfrac{1}{x}$;

при $y=4$, $x=\dfrac{1}{4}$; при $y=1$, $x=1$;

BC: $x=\sqrt{y} \Rightarrow y=x^2$; при $y=1$, $x=1$;

при $y=4$, $x=2$.

Таким образом, $I=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} dx \int\limits_{\frac{1}{y}}^{4} f(x;y)dy+\int\limits_1^2 dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x;y)dy.$

Пример 8. Вычислить $I=\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$, если область D ограничена параболами $y=x^2$, $x=y^2$.

Решение

Область интегрирования D изображена на рис. 10.

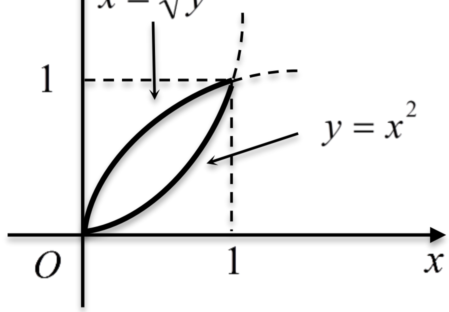

Рис. 10

Она ограничена слева и справа прямыми $x=0$ и $x=1$, а снизу и сверху – параболами $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Следовательно,

$$I=\iint\limits_D (x^2+y)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y)dy=\int\limits_0^1\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^2\sqrt{x}+\frac{x}{2}-x^4-\frac{x^4}{2}\right)dx=\int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{x}{2}-\frac{3x^4}{2}\right)dx=\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{x^2}{4}-\frac{3}{10}x^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{33}{140}.$$

Пример 9. Вычислить $I=\iint\limits_D xydxdy,$ если D: $y=x-4,\ y^2=2x.$

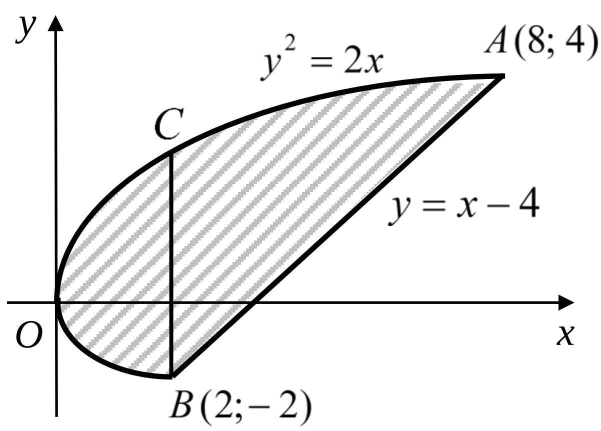

Рис. 11

Решение

Построим данные линии и найдем их точки пересечения (рис. 11).

Если внутренний интеграл записать по переменной x, то двойной интеграл по области D выразится одним двукратным интегралом:

$$I=\iint\limits_{xy} dxdy=\int_{-2}^{4}ydy\int_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4}xdx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}yx^2\Bigg|_{x=\frac{1}{2}y^2}^{x=y+4}dy=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left((y+4)^2-\frac{y^4}{4}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(y^3+8y^2+16y-\frac{y^5}{4}\right)dy=\frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4}+\frac{8y^3}{3}+8y^2-\frac{y^6}{24}\right)\Bigg|_{-2}^{4}=90.$$

Если интегрировать в другом порядке – сначала по y, а затем по x, то нужно область D предварительно разбить прямой BC на две части.

В этом случае $I=\int_0^2 xdx\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}}ydy+\int_2^8 xdx\int_{x-4}^{\sqrt{2x}}ydx.$

Вычислив сумму этих двух интегралов, можно убедиться, что результат не зависит от порядка интегрирования.

Пример 10. Вычислить

$$I=\iint\limits_D(\sin x-2y)\,dxdy,\ \text{если}\ D:\ \ y=x^2,\ y=2+x^2,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{2}.$$

Решение

Начертим область интегрирования (рис. 12).

Если интегрировать вначале по переменной x, то пришлось бы область D предварительно разбить прямыми, параллельными оси Ox, на три части. Поэтому целесообразно внутренний интеграл записать по переменной y.

Имеем

$$I=\iint_D(\sin x-2y)\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{x^2}^{2+x^2}(\sin x-2y)dy=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y\sin x-y^2)\,dx\Bigg|_{y\,=\,x^2}^{y\,=\,2\,+\,x^2}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}((2+x^2)\sin x-x^2\sin x-(2+x^2)^2+x^4)\,dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x-4x^2-4)\,dx=2(1-\pi)-\frac{\pi^3}{6}.$$

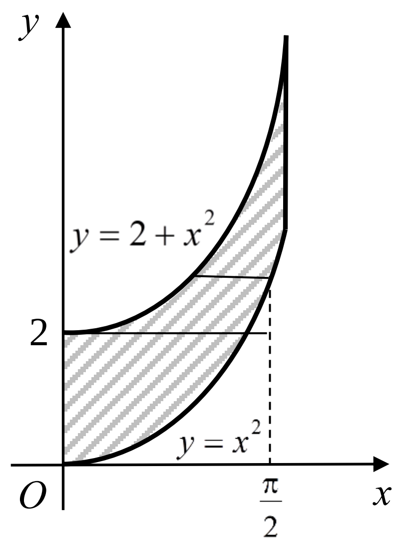

Рис. 12

Пример 11. Вычислить $\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy,$ если D: $xy=1, xy=3, y=x, y=2x,$ $x>0, y>0.$

Решение

Изобразим область интегрирования на чертеже (рис. 13).

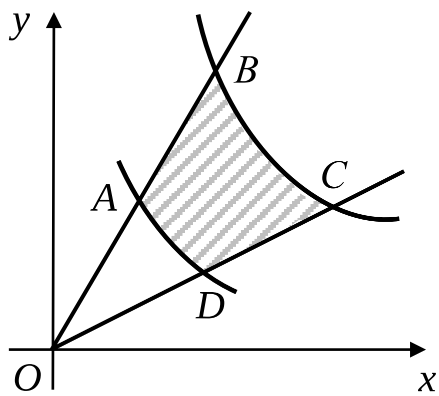

Рис. 13

Для вычисления этого интеграла в декартовой системе координат область $ABCD$ необходимо разбить прямыми, параллельными одной из координатных осей на три части. Затем вычислить интеграл по каждой частичной области и полученные результаты просуммировать. Однако существует более короткий путь вычисления этого интеграла. Осуществим переход к криволинейным координатам по формулам:

$$xy=u,\ \ (1\le u\le 3),\ \ y=vx,\ \ (1\le v\le 2).$$

Отсюда $x=\sqrt{\dfrac{u}{v}},\ \ y=\sqrt{uv}.$

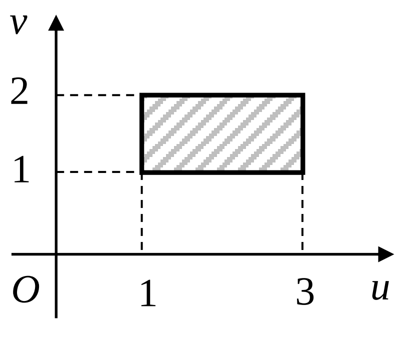

Рис. 14

При этом изображением области D является прямоугольник D_1: $1 \le u \le 3, 1 \le v \le 2$ (рис. 14).

Определяем якобиан преобразования:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v^3}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Таким образом,

$$\iint_D \frac{y}{x} dxdy = \iint_{D'} \frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{\dfrac{u}{v}}} \cdot \frac{1}{2v} dudv = \frac{1}{2}\int_1^3 du \int_1^2 dv = 1.$$

Пример 12. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $I = \iint_D f(x,y)dxdy,$ где

а) D – круг $x^2 + y^2 \le R^2$;

б) D – область, ограниченная линиями $x^2 + y^2 = 4x,\ x^2 + y^2 = 8x,\ y = x,\ y = 2x.$

Решение

а) Переходя к полярной системе координат $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$ получаем следующее уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$: $r = R.$ Очевидно, что

$0 \le \varphi \le 2\pi,\ I(r;\varphi) = r,$ поэтому $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r \cdot dr$.

б) Преобразуем выражения $x^2 + y^2 = 4x$ и $x^2 + y^2 = 8x$ к каноническому виду:

$x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4;$

$x^2 + y^2 = 8x \Rightarrow (x-4)^2 + y^2 = 16.$

Следовательно, область D ограничена окружностью радиусом 2 с центром в точке (2;0), окружностью радиусом 4 с центром в точке (4;0), а также прямыми $y = x$ и $y = 2x$ (рис. 15).

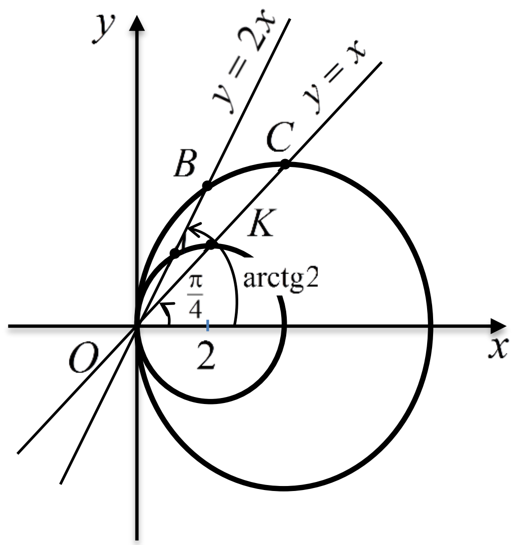

Рис. 15

Фигура $ABCK$ ограничена лучом $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ и

$\varphi = \operatorname{arctg} 2$. В полярной системе координат уравнение дуги AK имеет вид $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 4r\cos\varphi \Rightarrow r = 4\cos\varphi$.

Аналогично, уравнение дуги BC имеет вид

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 8r\cos\varphi \;\Rightarrow\; r = 8\cos\varphi.$$

Таким образом, $I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr$.

Пример 13. Переходя к полярным координатам, вычислить $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy$.

Решение

Изобразим область интегрирования (рис. 16).

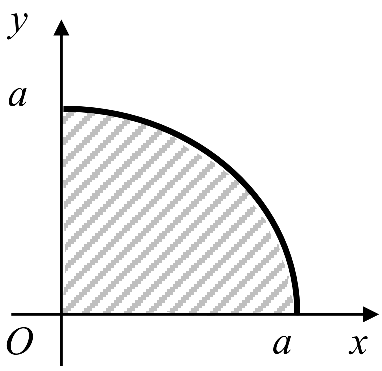

Рис. 16

Перейдем к полярным координатам:

$x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi,\; \left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right),$ $\quad I(r;\varphi) = r,$ $\sqrt{x^2+y^2} = r$.

Следовательно,

$$\int dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a r^2 dr = \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^a = \frac{1}{6}\pi a^3.$$

Пример 14. Вычислить $I = \iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$, если $D\colon\; 1 \le x^2+y^2 \le 4$.

Решение

Область D представляет собой круговое кольцо, заключенное между окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$ (рис. 17). Его можно разбить на трапециевидные части, как показано на рис. 43, и применить формулу сведения двойного интеграла к повторному. Однако гораздо удобнее сделать замену переменных – перейти к полярным координатам:

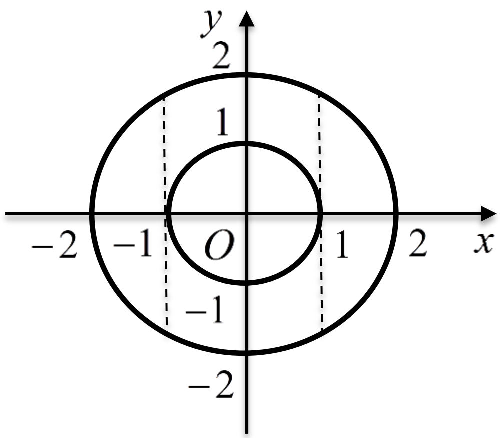

Рис. 17

$$x = r\cos\varphi,\;\; y = r\sin\varphi,\;\; 0 \le \varphi \le 2\pi,\;\; I(r;\varphi) = r,\;\; x^2+y^2 = r^2.$$

При этом отображении прообразом кольца является прямоугольник $1 \le r \le 2,$ $0 \le \varphi \le 2\pi.$ Сводя двойной интеграл к повторному, получаем $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$

Пример 15. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$ если $D\colon\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Решение

Из аналитического выражения подынтегральной функции и уравнения границы области D следует, что для решения этой задачи целесообразно перейти к обобщенным полярным координатам. Положив $x = ar\cos\varphi,\ \ y = br\sin\varphi$, получим

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{1-r^2},\ \ I(r;\varphi) = abr,\ \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \Rightarrow\ r=1,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy = ab\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr = ab\varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^1 (1-r^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1-r^2) =$$

$$= ab\cdot 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\pi ab.$$

Пример 16. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$ и $y = 2x - 1.$

Решение

Построим фигуру (рис. 18).

Решив уравнение $y = 2 - x^2 = 2x - 1,$ найдем абсциссы точек A и B: $x_A = -3,\ x_B = 1.$

Находим

$$S = \iint\limits_D dx\,dy = \int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} dy = \int\limits_{-3}^{1} y\Big|_{2x-1}^{2-x^2} dx =$$

$$= \int\limits_{-3}^{1}(2-x^2-2x+1)\,dx = \left(3x-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-3}^{1} =$$

$$= \left(3-\frac{1}{3}-1\right)-(-9+9-9) = 10\frac{2}{3}.$$

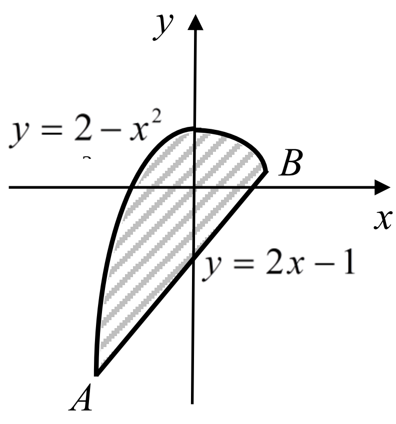

Рис. 18

Пример 17. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 2\cos\varphi$ и

$r = 2(1+\cos\varphi)$.

Решение

Линии заданы в полярных координатах, поэтому воспользуемся формулой площади в полярных координатах $S = \iint\limits_D r dr d\varphi$.

Функция $r = 2\cos\varphi$ определена при $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, так как при прочих значениях φ получается $r < 0$. Вторая функция $r = 2(1+\cos\varphi)$ определена при $\varphi \in (-\pi; \pi)$. Область интегрирования D имеет вид, изображенный на рис. 19. Так как фигура симметрична относительно полярной оси, можно ограничиться вычислением верхней половины площади, а результат удвоить.

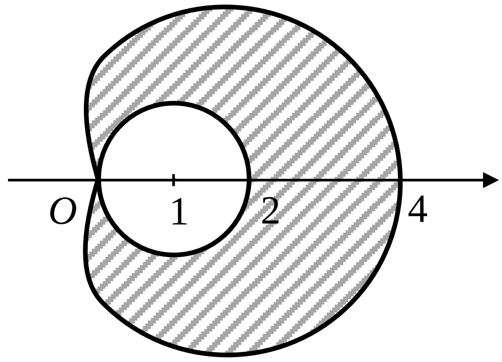

Рис. 19

Имеем

$$S = 2\iint\limits_{D_1} r dr d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{2(1+\cos\varphi)} r dr + 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2(1+\cos\varphi)} r dr =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi) d\varphi + 4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+\cos 2\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi =$$

$$= 4\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi) d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+\cos 2\varphi) d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi \right) =$$

$$= 4\left(\int\limits_0^{\pi} (1+\cos 2\varphi) d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+\cos 2\varphi) d\varphi \right) = 5\pi$$

.

Пример 18. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x^3 + y^3 = 3axy$.

Решение

Уравнение $x^3 + y^3 = 3axy$ задает кривую, которая называется декартовым листом и

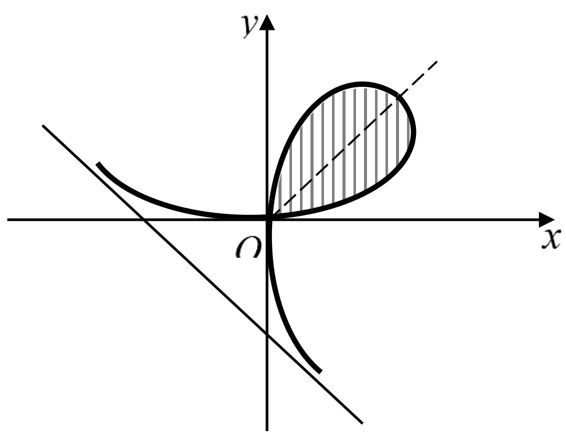

Рис. 20

состоит из петли и двух бесконечных ветвей (рис. 20). Для нахождения площади фигуры удобно перейти к полярным координатам: $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ I(r;\varphi) = r$.

В полярной системе координат исходное уравнение примет вид

$$r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 3ar^2\cos\varphi\sin\varphi, \quad \text{т. е.} \quad r = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}.$$

Осью симметрии петли является луч $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, поэтому

$$S = 2\iint\limits_{D_1} r\,dr\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}} r\,dr = 9a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= 9a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4\varphi\cdot \mathrm{tg}^2\varphi}{\cos^6\varphi(1+\mathrm{tg}^3\varphi)^2}\,d\varphi = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\,\mathrm{tg}^2\varphi\, d(tg\varphi)}{(1+\mathrm{tg}^3\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1+\mathrm{tg}^3\varphi)}{(1+\mathrm{tg}^3\varphi)^2}\,d\varphi = -\left.\frac{3a^2}{1+\mathrm{tg}^3\varphi}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}a^2.$$

Пример 19. Найти площадь, ограниченную линией $\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\right)^2 = \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}$.

Решение

Ввиду симметрии, площадь всей фигуры $S = 4S_1$, где S_1 – площадь части фигуры, расположенной в первой четверти. Перейдем к обобщенным полярным координатам: $x = 2r\cos\varphi,\ \ y = 3r\sin\varphi,\ \ I = 6r.$

Найдем уравнение линии в обобщенной полярной системе:

$$\left(\frac{4r^2\cos^2\varphi}{4}+\frac{9r^2\sin^2\varphi}{9}\right)^2 = \frac{4r^2\cos^2\varphi}{4}-\frac{9r^2\sin^2\varphi}{9};\ \ r_1 = 0,\ \ r_2 = \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Отсюда следует, что в первой четверти полярные координаты изменяются так: $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4},\ \ 0 \le r \le \sqrt{\cos 2\varphi}.$

Таким образом,

$$S = 4\iint\limits_{D_1} dx\,dy = 4\cdot 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr = 24\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d\varphi = 6\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 6.$$

Пример 20. Найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями: $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ x+z=6,\ z=0.$

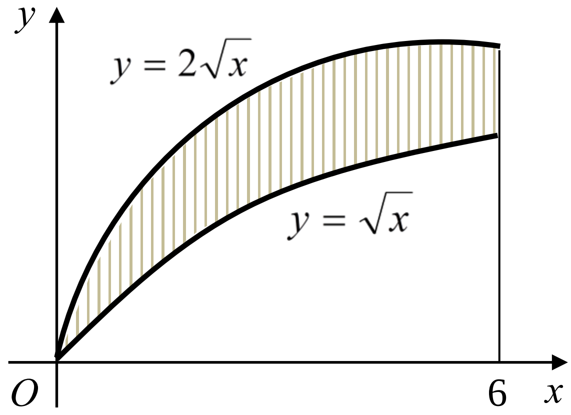

Рис. 21

Решение

Снизу тело ограничено плоскостью $z=0,$ сверху – плоскостью $z=6-x.$ Изобразим проекцию тела на плоскость xOy (рис. 21).

Следовательно,

$$V=\int_0^6 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(6-x)dy=\int_0^6(6y-xy)\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dx=\int_0^6((12\sqrt{x}-2x\sqrt{x})-(6\sqrt{x}-x\sqrt{x}))\,dx=$$

$$=\int_0^6(6x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}})\,dx=\left(\frac{2}{3}\cdot 6x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^6=\frac{2}{3}\cdot 6^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{5}\cdot 6x^{\frac{5}{2}}=\frac{4}{15}\cdot 6^{\frac{5}{2}}=\frac{48}{5}\sqrt{6}.$$

Пример 21. Найти объем тела, ограниченного плоскостями $y+z=2,\ y-z=2$ и цилиндром $x^2+y^2=4$.

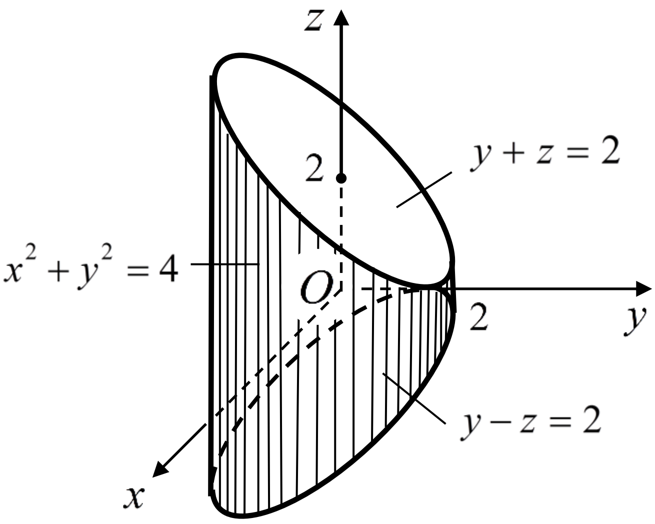

Рис. 22

Решение

Тело, ограниченное данными поверхностями, изображено на рис. 22. В силу его симметрии относительно плоскости xOy, вычислим объем половины тела, расположенной над плоскостью xOy, и результат удвоим. Проекцией этой части тела на плоскость xOy является окружность $x^2+y^2=4$ радиусом 2 с центром в точке O. Для вычисления двойного интеграла, определяющего объем тела, перейдем к полярным координатам: $x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi,\ I(r;\varphi)=r$.

Уравнение окружности $x^2+y^2=4$ в полярной системе координат имеет вид $r^2=4$ или $r=2$; уравнение плоскости $z=2-y=2-r\sin\varphi$. Так как $0\le\varphi\le 2\pi$, то имеем

$$V=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r(2-r\sin\varphi)\,dr=2\int_0^{2\pi}\left(r^2-\frac{r^3}{3}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^2 d\varphi=2\int_0^{2\pi}\left(4-\frac{8}{3}\sin\varphi\right)d\varphi=$$

$$= 2\left(4\varphi + \frac{8}{3}\cos\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 16\pi.$$

Пример 22. Вычислить площадь поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

Решение

Проекцией поверхности на плоскость *xOy* является круг $x^2 + y^2 \le 1$.

Из уравнения конуса имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Тогда $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dxdy =$

$$= \sqrt{2}\iint\limits_D dxdy = \sqrt{2}\, S = \sqrt{2} \cdot \pi = \sqrt{2}\, \pi.$$

Пример 23. Вычислить массу неоднородной пластины D, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = y^2$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\mu = 3x + 2y + 6$.

Решение

Построим область, ограниченную кривыми $y = x^2$ и $x = y^2$ (рис. 23).

Из физического смысла двойного интеграла следует, что искомая масса

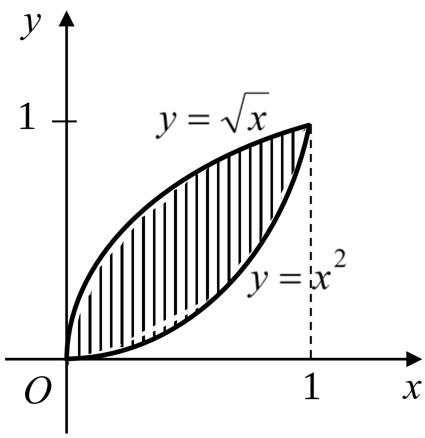

Рис. 23

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y)\, dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (3x + 2y + 6)\, dy =$$

$$= \int\limits_0^1 (3xy + y^2 + 6y)\Bigg|_{y = x^2}^{y = \sqrt{x}} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (3x^{\frac{3}{2}} + x + 6x^{\frac{1}{2}} - 3x^3 - x^4 - 6x^2)\, dx =$$

$$= \left(\frac{2}{5}3x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2} + 6\frac{2}{3}3x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - 2x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{6}{5} + \frac{1}{2} + 4 - \frac{3}{4} - \frac{1}{5} - 2 = \frac{11}{4}.$$

Пример 24. Найти моменты инерции I_x и I_y относительно координатных осей *Ox* и Oy пластины плотностью $\delta(x,y)=xy,$ ограниченной кривыми $y=0,\ y=x,\ y=2x.$

Решение

Область, ограниченная кривыми $y=0,$ $y=x,\ y=2x$ изображена на рис. 24.

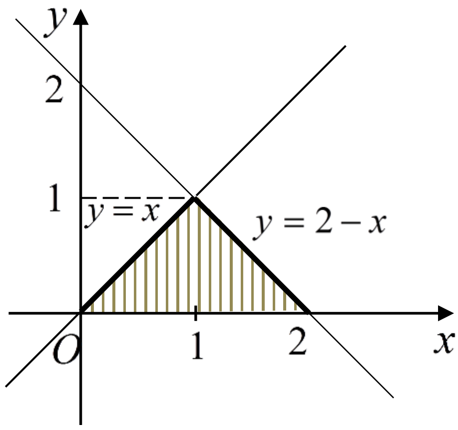

Рис. 24

Моменты инерции I_x и I_y определяются по формулам:

$$I_x=\iint\limits_D y^2\delta(x,y)dxdy,\ I_y=\iint\limits_D x^2\delta(x,y)dxdy.$$

Следовательно,

$$I_x=\iint\limits_D xy^3dxdy=\int\limits_0^1 y^3dy\int\limits_y^{2-y}xdx=\int\limits_0^1 y^3\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_y^{2-y}\right)dy=2\int\limits_0^1(y^3-y^4)dy=\frac{1}{10};$$

$$I_y=\iint\limits_D x^3ydxdy=\int\limits_0^1 ydy\int\limits_y^{2-y}x^3dx=\int\limits_0^1 y\left(\frac{x^4}{4}\Bigg|_y^{2-y}\right)dy=\int\limits_0^1 y\left(\frac{(2-y)^4}{4}-\frac{y^4}{4}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^1(16y-32y^2+24y^3-8y^4)\,dy=\frac{13}{30}.$$

Дополнительные задачи

1. Найти площадь области, ограниченной кривыми:

а) $y^2=10x+25,\ y^2=9-6x;$ б) $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4.$

Ответ: а) $\frac{1}{3}\cdot 16\sqrt{15};$ б) $\frac{3\pi}{4}.$

2. Вычислить повторные интегралы, переменив порядок интегрирования:

а) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}dy;$ б) $\int\limits_0^{\pi}dy\int\limits_y^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx.$

Ответ: а) $\frac{8}{15};$ б) 2.

3. Вычислить двойные интегралы:

а) $\iint\limits_D(x+2y)dxdy,$ D: $y=x,\ y=2x,\ x=2,\ x=3;$

б) $\iint\limits_{D} \dfrac{dxdy}{x^2 + y^2 - 1}$, D: $\left\{9 \le x^2 + y^2 \le 25\right\}$.

Ответ: а) $\dfrac{76}{3}$; б) $\pi \ln 3$.