Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Уравнения с разделяющимися переменными

Пример 1. Показать, что данная функция является решением (интегралом) заданного дифференциального уравнения:

а) $y = 3\sin x - 4\cos x,\ y'' + y = 0;$ б) $y = x\left(1 + \int \frac{e^x}{x} dx\right),\ x\frac{dy}{dx} - y = xe^x;$

в) $y = \operatorname{arctg}(x+y),\ (x+y)^2 \frac{dy}{dx} = 1;$ г) $\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = b\cos t, \end{cases}\ y' + \frac{b^2 x}{a^2 y} = 0.$

Решение

а) Последовательно находим:

$y' = 3\cos x + 4\sin x,$

$y'' = -3\sin x + 4\cos x.$

Подставляя в заданное уравнение y и y', получим

$$-3\sin x + 4\cos x + 3\sin x - 4\cos x \equiv 0.$$

Таким образом, эта функция обращает заданное уравнение в тождество, т. е. является его решением.

б) Вычислим производную данной функции:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \int \frac{e^x}{x} dx + x \cdot \frac{e^x}{x} = 1 + e^x + \int \frac{e^x}{x} dx.$$

Имеем $x\frac{dy}{dx} - y = x\left(1 + e^x + \int \frac{e^x}{x} dx\right) - x\left(1 + \int \frac{e^x}{x} dx\right) = xe^x.$

Данная функция обращает исходное уравнение в тождество и, следовательно, является решением этого уравнения.

в) Применяя к данному соотношению правило дифференцирования неявной функции, имеем $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{dy}{dx}}{1 + (x+y)^2}$. Отсюда $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+y)^2}$.

Подставляя найденное значение $\frac{dy}{dx}$ в данное дифференциальное уравнение, получим тождество $(x+y)^2 \cdot \frac{1}{(x+y)^2} = 1.$

г) Предполагаемое решение задано параметрическими уравнениями. По правилу дифференцирования функции, заданной параметрически, получим $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t.$

Подставляя в исходное уравнение x, y, y'_x, получим $-\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t + \dfrac{b^2 a \sin t}{a^2 b \cos t} \equiv 0.$

Пример 2. Составить дифференциальные уравнения семейства кривых:

а) $x^2 + y^2 - cx = 0;$

б) $y = \sin x + c\cos x.$

Решение

а) Рассматривая в данном соотношении y как неявную функцию от x и дифференцируя по x, имеем $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} - c = 0.$ Отсюда $c = 2x + 2y\dfrac{dy}{dx}.$

Подставляя в исходное соотношение вместо c последнее выражение, получим $2xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0.$

б) Дифференцируя данное равенство по x, имеем $\dfrac{dy}{dx} = \cos x - c\sin x.$ Умножим обе части исходного уравнения на $\sin x$, а последнего – на $\cos x$ и, сложив почленно, получим $\dfrac{dy}{dx}\cos x + y\sin x - 1 = 0.$

Пример 3. С помощью изоклин построить приближенно интегральные кривые уравнения $x\dfrac{dy}{dx} = 2y.$

Решение

Очевидно, ось абсцисс является интегральной кривой данного уравнения. Интегральные кривые расположены симметрично относительно оси абсцисс и относительно оси ординат (при замене x на $-x$ или y на $-y$ уравнение не изменяется). Поэтому исследуем поведение интегральных кривых только в I четверти.

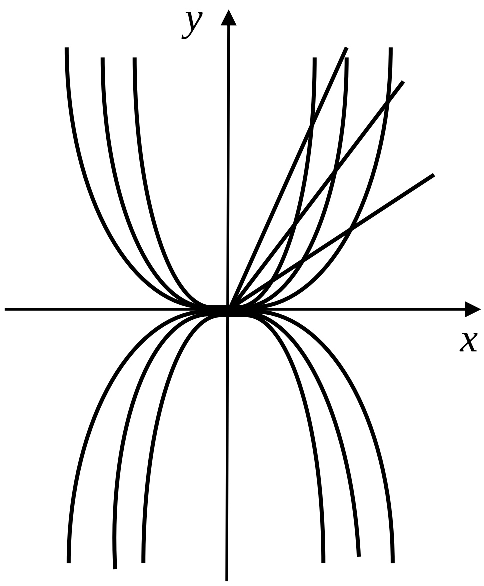

Рис. 1

Семейство изоклин определяется уравнением

$k=\frac{2y}{x},\ y=\frac{k}{2}x.$ Для любого $k>0$ касательные к интегральным кривым данного уравнения, проведенные в точках прямой $y=\frac{k}{2}x,$ образуют с осью абсцисс угол, равный $\operatorname{arctg} k.$ Нарисовав несколько изоклин и поле направлений, строим приближенно интегральные кривые уравнения (рис. 1).

Пример 4. Решить уравнение $ydx-x^2dy=0.$

Решение

Очевидно, что функции $x=0$ и $y=0$ являются решениями уравнения. Остальные решения найдем, разделив переменные в уравнении и проинтегрировав его $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x^2},\ \ln|y|=-\frac{1}{x}+\ln|c|,\ (c\neq 0),\ \ y=ce^{-\frac{1}{x}}.$

Решение $y=0$ можно получить из последнего соотношения при $c=0$. Таким образом, $y=0$ является частным решением.

Решение $x=0$ не может быть получено из общего решения. Это особое решение.

Ответ: $y=ce^{-\frac{1}{x}},\ (c\in R),\ x=0.$

Пример 5. Решить уравнение $\frac{dy}{dx}=xy^2+2xy.$

Решение

Перепишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx}=xy(y+2).$

Функции $y=0$ и $y=-2$ являются решениями уравнения. Остальные решения найдем, разделив переменные и проинтегрировав его:

$$\frac{dy}{y(y+2)}-xdx=0,\quad \int\frac{dy}{y(y+2)}-\int xdx=0,\quad \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+2}\right)dy-\int xdx=0,$$

$$\ln|y|-\ln|y+2|-x^2=\ln c_1,\quad \frac{|y|}{|y+2|}=c_1e^{x^2},\ c_1>0,$$

$$\frac{y}{y+2}=ce^{x^2},\quad (c\in R)\ \text{ или }\ y=\frac{2ce^{x^2}}{1-ce^{x^2}}.$$

Решение $y=0$ может быть получено из общего решения при $c=0$.

Решение $y=-2$ не входит в формулу общего решения ни при каком конечном значении константы c.

Ответ: $y=\dfrac{2ce^{x^2}}{1-ce^{x^2}}, \quad y=-2$.

Пример 6. Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx}=k\dfrac{y}{x}$ и построить интегральные кривые этого уравнения.

Решение

Правая часть заданного уравнения определена во всей плоскости xOy, за исключением точек прямой $x=0$. Очевидно, функция $y=0$ при $x<0$ и при $x>0$ является решением данного уравнения. Остальные решения определим из соотношения $\int\dfrac{dy}{y}=k\int\dfrac{dx}{x}$. Отсюда $\ln|y|=k\ln|x|+\ln c_1, \quad |y|=c_1|x|^k, \quad c_1>0.$

Присоединяя к этим функциям решение $y=0$, все решения можно записать формулой $y=c|x|^k$, $c\in R$. Интегральные кривые в зависимости от параметра k изображены на рис. 2.

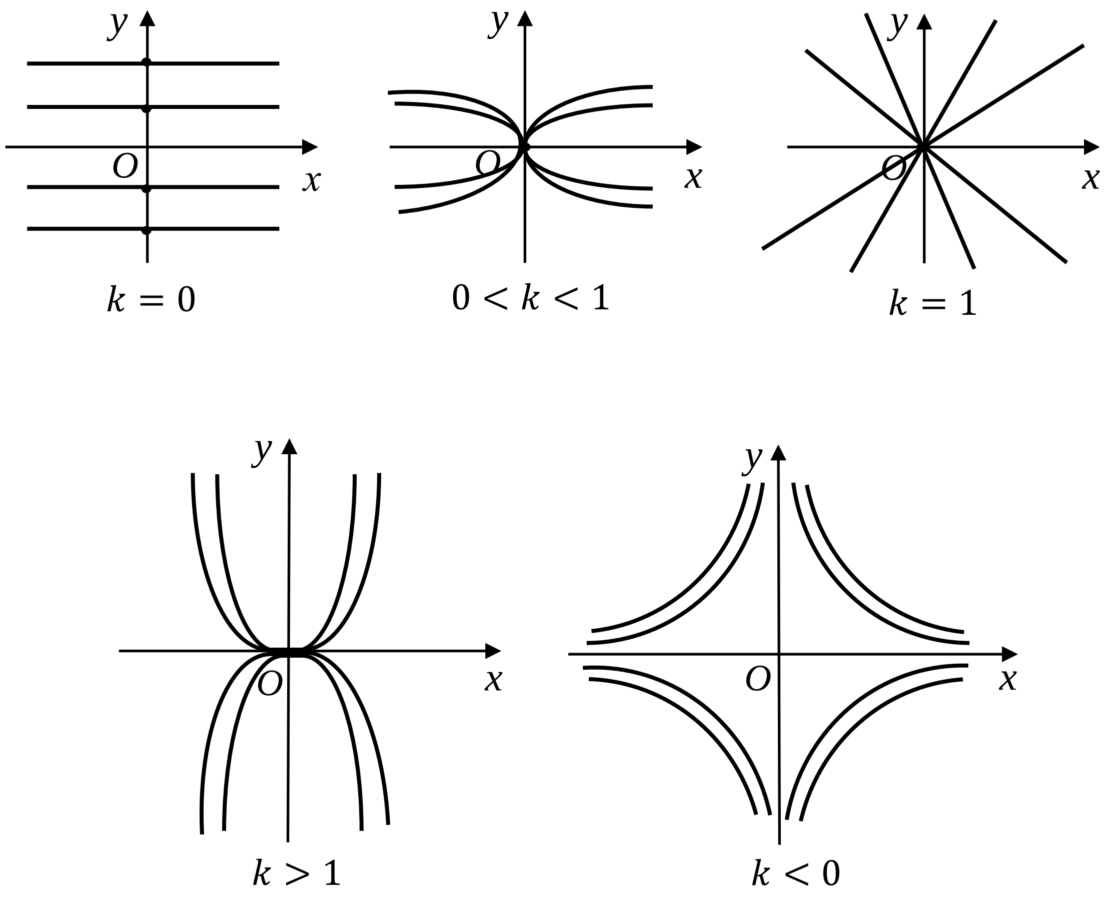

Рис. 2

Пример 7. Решить задачу Коши $\frac{dy}{dx} + y = 2x + 1, \quad y(0) = 0.$

Решение

Данное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными, если положить $y - 2x - 1 = z.$

Имеем $\frac{dy}{dx} - 2 = \frac{dz}{dx}, \; \frac{dz}{dx} = -z - 2, \; z \neq -2,$ так как $y(0) = 0.$

Разделив переменные, интегрируем уравнение:

$$\frac{dz}{z+2} = -dx, \; \ln|z+2| = -x + \ln c, \; |z+2| = ce^{-x}, \; z = -2 + ce^{-x}, \; c \in R$$

или $y = 2x - 1 + ce^{-x}.$

Подставив в последнее соотношение $x = 0, \; y = 0,$ получим $c = 1.$

Ответ: $y = 2x - 1 + e^{-x}.$

Дополнительные задачи

1. Показать, что для данных дифференциальных уравнений указанные соотношения являются интегралами:

а) $(x - 2y)y' = 2x - y, \; x^2 - xy + y^2 = c^2;$

б) $(x - y + 1)y' = 1, \; y = x + ce^{y}.$

2. Составить дифференциальное уравнение семейства окружностей с общим центром $A(0;1)$.

Ответ: $(y-1)\frac{dy}{dx} + x = 0.$

3. Составить дифференциальное уравнение семейства парабол, которые проходят через начало координат и для которых ось абсцисс является осью симметрии.

Ответ: $2x\frac{dy}{dx} - y = 0.$

4. Решить задачу Коши: $(y-4)\,dx - (x+1)\,dy = 0, \; y(1) = 10$.

Ответ: $y = 3x + 7$.

5. Решить уравнение: $y\cos\sqrt{x}\,dx - \sqrt{x}dy = 0.$

Ответ: $y = Ce^{2\sin\sqrt{x}}, \; x = 0.$

6. Решить уравнение: $ye^{2x}dx+(1+e^{2x})\,dy=0.$

Ответ: $y^2(e^{2x}+1)=C$.

7. Решить уравнение: $y'=\dfrac{2x+y-1}{4x+2y+3}$.

Ответ: $\ln|2x+y+1|=x-2y+C,\ \ y=-2x-1.$

8. Решить уравнение: $y'=\sin^2(x-y+5)$.

Ответ: $\operatorname{tg}(x-y+5)=x+C,\ \ x-y+5=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in \boldsymbol{Z}$.

9. Решить уравнение $(xy-x)dx+(xy+x-y-1)dy=0.$

Ответ: $x+\ln|x-1|+y+2\ln|y-1|=c.$

10. Решить задачу Коши $(1+e^x)yy'=e^x,\ \ y(0)=1.$

Ответ: $2e^{\frac{y^2}{2}}=\sqrt{e}(1+e^x).$

11. Решить уравнение $(2x+3y-1)\,dx+(4x+6y-5)\,dy=0.$

Ответ: $x+2y+3\ln|2x+3y-7|=c.$