Дифференциальные уравнения первого порядка

Пример 1. Решить уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}$.

Решение

Правая часть уравнения – однородная функция нулевой степени, поэтому данное уравнение однородное.

Положим $y=ux$. Тогда $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ и после подстановки данное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными:

$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2u}$ или $xdu=\frac{1-u^2}{2u}dx.$

Функции $u=\pm1$ являются решениями. Пусть $u\neq\pm1$. Разделим переменные $\frac{2udu}{1-u^2}=\frac{dx}{x}$. Интегрируя, найдем $-\ln\left|1-u^2\right|=\ln|x|-\ln|c|$ или $x(1-u^2)=c$, $c\in R.$ Так как $u=\frac{y}{x}$, окончательно получаем $y^2=x^2-cx.$

Решения $u=\pm1$, т. е. $y=\pm x$ являются частными решениями.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}$.

Решение

Это однородное уравнение. Положим $y=ux.$ Тогда $\frac{du}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ и после подстановки получим $x\frac{du}{dx}=\operatorname{sign}x\ \sqrt{1-u^2}$, $x\neq0.$

Очевидно, функции $u=\pm1$ или $y=\pm x$ являются решениями полученного уравнения. Другие решения найдем разделяя переменные.

Имеем $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\operatorname{sign}x}{x}dx,$ $\arcsin u=\operatorname{sign}x\ln|x|+c.$ Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получим $\arcsin\frac{y}{x}=\operatorname{sign}x\ln|x|+c,$ $y=x,$ $y=-x.$

Пример 3. Решить уравнение $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0.$

Из всех решений выделите то, которое удовлетворяет условию $y(1)=1.$

Решение

Данное уравнение приводится к однородному. Произведем замену переменных $x = t + \alpha,\ \ y = s + \beta.$ Получим

$$(2t + 2\alpha - s - \beta + 1)dt + (2s + 2\beta - t - \alpha - 1)ds = 0.$$

Из системы уравнений $\begin{cases} 2\alpha - \beta + 1 = 0, \\ -\alpha + 2\beta - 1 = 0 \end{cases}$ находим $\alpha = -\dfrac{1}{3},\ \beta = \dfrac{1}{3},$ получим однородное уравнение $(2t - s)\,dt + (2s - t)\,ds = 0.$

В последнем уравнении положим $s = ut.$

Имеем $(2t - ut)dt + (2ut - t)(udt + tdu)du = 0,$

$$(2t - ut + 2u^2t - ut)dt + (2ut^2 - t^2)du = 0,\ (2u^2 - 2u + 2)dt + (2u - 1)tdt,$$

или $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2u - 1}{u^2 - u + 1}du = -\dfrac{dt}{t},$

$$\ln(u^2 - u + 1) + \ln t^2 = \ln c,$$

$$\left(\frac{s^2}{t^2} - \frac{s}{t} + 1\right)t^2 = c,\ s^2 - st + t^2 = c.$$

Возвращаясь к переменным x и y, получим

$$\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) + \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = c, \quad x^2 + y^2 - xy + x - y = c_1.$$

Это общий интеграл уравнения. Положив $x = 1,\ y = 1,$ находим $c_1 = 1.$

Ответ: $x^2 + y^2 - xy + x - y = 1.$

Пример 4. Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = e^{-\sin x}.$

Решение

Это линейное уравнение. Найдем его общее решение методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа).

1) Решим соответствующее линейное однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = 0.$$

Функция $y = 0$ является решением этого уравнения.

Другие его решения найдем, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{y}=-\cos x,\ \ \ln|y|=-\sin x+\ln|c|,\ \ y=ce^{-\sin x},\ \ c\neq 0.$$

Решение $y=0$ можно получить из последней формулы при $c=0$, поэтому все решения однородного уравнения выражаются формулой $y=c\cdot e^{-\sin x}, c\in R.$

2) Решение исходного уравнения ищем в виде $y=c(x)\cdot e^{-\sin x}$.

Подставив это выражение в заданное уравнение, получим

$$\frac{dc(x)}{dx}e^{-\sin x}-\cos x\ e^{-\sin x}c(x)+c(x)e^{-\sin x}\cos x=e^{-\sin x},$$

$$\frac{dc(x)}{dx}=1,\ \ c(x)=x+c.$$

Ответ: $y=(x+c)e^{-\sin x}$.

Пример 5. Проинтегрировать уравнение $y'+\frac{3}{x}y=\frac{2}{x^3}$ методом Бернулли, решить задачу Коши при начальном условии $y(1)=1$.

Решение

Это линейное уравнение. Сделав подстановку Бернулли $y=uv$, получим $u'v+uv'+\frac{3}{x}uv=\frac{2}{x^3},\ u'v+u\left(v'+\frac{3}{x}v\right)=\frac{2}{x^3}.$

Находим частное решение уравнения

$$v'+\frac{3}{x}v=0:\quad \frac{dv}{v}=-\frac{3}{x}dx,\ \ln|v|=-3\ln|x|+c.$$

В качестве частного решения можно взять $v=\frac{1}{x^3}$.

Тогда для отыскания u получим уравнение $u'\frac{1}{x^3}=\frac{2}{x^3}$. Отсюда находим $u=2x+c.$

Общее решение исходного уравнения $y=(2x+c)\frac{1}{x^3}$.

Из него выделяем частное решение, удовлетворяющее условию $y(1)=1:\quad 1=(2+c)-1,$ откуда $c=-1.$ Подставляя $c=-1$ в общее решение, получаем частное решение $y=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$.

Пример 6. Найти общее решение уравнения $2ydx+(y^2-2x)dy=0.$

Решение

Это уравнение приводится к линейному с неизвестной функцией $x(y)$:

$$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=-\frac{y}{2},\ (y\neq 0).$$

Решим его методом подстановки Бернулли $(x(y)=u(y)\cdot v(y))$:

$$u'v+uv'-\frac{1}{y}uv=-\frac{y}{2},\quad u'v+u\left(v'-\frac{1}{y}v\right)=-\frac{y}{2}.$$

Находим частное решение уравнения $\dfrac{dv}{dy}-\dfrac{1}{y}v=0.$

Разделив переменные, получим $\dfrac{dv}{v}=\dfrac{dy}{y},\ v=y.$

Для отыскания u получим уравнение $\dfrac{du}{dy}y=-\dfrac{y}{2}$. Отсюда находим $u=-\dfrac{1}{2}y+c.$

Следовательно, общее решение исходного уравнения $x=cy-\dfrac{y^2}{2}$.

Пример 7. Решить уравнение Бернулли $y'-2xy=2x^3y^2$, приведя его к линейному уравнению.

Решение

Разделим обе части уравнения на y^2: $y^{-2}y'-2xy^{-1}=2x^3$. Положим $y^{-1}=z,$ тогда $-y^{-2}y'=z'$. Умножив обе части уравнения на (–1) и выполнив указанную подстановку, получим линейное уравнение $z'+2xz=-2x^3$.

Решим это уравнение методом интегрирующего множителя (методом Эйлера). Находим интегрирующий множитель $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int 2xdx}=e^{x^2}$.

Домножив обе части уравнения на $\mu(x)$, получим $\left(ze^{x^2}\right)'=-2x^3e^{x^2}$.

Тогда $ze^{x^2}=\int(-2x^3e^{x^2})\,dx=e^{x^2}(1-x^2)+c$.

Отсюда находим $z=\dfrac{e^{x^2}(1-x^2)+c}{e^{x^2}}$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения $y=\dfrac{e^{x^2}}{e^{x^2}(1-x^2)+c}$.

Пример 8. Решить уравнение $(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy=0.$

Решение

Для того чтобы уравнение $M(x;y)dx+N(x;y)dy=0$ было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{\partial M(x;y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x;y)}{\partial x}$.

В данном случае $M(x;y)=2xy+3y^2$, $N(x;y)=x^2+6xy-3y^2$; а значит $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2x+6y$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}=2x+6y$.

Таким образом, $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, т. е. левая часть данного уравнения действительно является полным дифференциалом некоторой функции $u(x;y)$.

Для искомой функции $u(x;y)$ имеем $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xy+3y^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2+6xy-3y^2$.

Из первого уравнения получаем $u(x;y)=\int(2xy+3y^2)\,dx=x^2y+3xy^2+\varphi(y)$.

Дифференцируем последнее равенство по y:

$x^2+6xy+\dfrac{d\varphi}{dy}=x^2+6xy-3y^2$, т. е. $\dfrac{d\varphi}{dy}=-3y^2$.

Отсюда $\varphi(y)=-y^3+c_1$. Поэтому $u(x;y)=x^2y+3xy^2-y^3+c_1$.

Решение уравнения запишется в виде $x^2y+3xy^2-y^3=c$.

Пример 9. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$(e^x+y+\sin y)\,dx+(e^y+x+x\cos y)\,dy=0.$

Решение

Так как $\dfrac{\partial M}{\partial y}=1+\cos y$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}=1+\cos y$, т. е. $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах можно найти по одной из формул:

$$\int_{x_0}^{x}M(x;y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0;y)dy=c,\qquad \int_{x_0}^{x}M(x;y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}N(x;y)\,dy=c.$$

Подставив во вторую формулу для простоты $x_0=y_0=0$, получим

$$\int_0^x e^x dx + \int_0^y (e^y + x + x\cos y)dy = c,$$

$$e^x - 1 + (e^y + xy + x\sin y)\Big|_{y=0}^{y=y} = c,$$

$$e^x - 1 + e^y + xy + x\sin y - 1 = c, \qquad e^x + e^y + xy + x\sin y = c_1.$$

Пример 10. Решить уравнение $(x + y^2)dx - 2xydy = 0.$

Решение

Если левая часть уравнения $M(x;y)dx + N(x;y)dy$ не является полным дифференциалом и выполнены все условия теоремы Коши, то существует такая функция $\mu(x;y)$, называемая интегральным множителем, что $\mu(Mdx + Ndy) = du.$

Интегрирующий множитель легко находится в двух случаях:

1) $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = F(x)$, тогда $\mu = \mu(x)$;

2) $\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = F_1(y)$, тогда $\mu = \mu(y)$.

В нашем случае $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = 2y + 2y = 4y,$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x} = F(x).$$

Следовательно, $\mu = \mu(x)$.

Так как $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu(x)(x + y^2)) = \dfrac{\partial}{\partial x}(-2\mu(x)xy)$ или

$\mu(x)2y = -2\dfrac{dM}{dx}(xy) - 2\mu(x)y$, то $\dfrac{dM}{\mu} = -\dfrac{2}{x}dx$ и $\mu = \dfrac{1}{x^2}$.

Умножая уравнение на $\mu = \dfrac{1}{x^2}$, получим $\dfrac{x + y^2}{x^2}dx - \dfrac{2y}{x}dy = 0$ – уравнение в полных дифференциалах.

Общий интеграл уравнения найдем по формуле

$$\int_{x_0}^{x} M(x;y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x;y)dy = c, \quad (x_0 = 1,\ y_0 = 0),$$

$$\int_1^x \frac{1}{x}dx - \int_0^y \frac{2y}{x}dy = c, \;\; \ln|x| - \frac{1}{x}y^2 = c.$$

Дополнительные задачи

1. Решить задачу Коши $ydx + (\sqrt{xy} - x)dy = 0, \;\; y(1) = 1.$

Ответ: $2 - \ln|y| = 2\sqrt{\frac{y}{x}}.$

2. Решить уравнение $(2x + y)\,dy - (x + 2y)\,dx = 0$.

Ответ: $(y - x)^3 = C^2(x + y)$.

3. Решить уравнение $(4xy + x^2)\,dy - 2y^2\,dx = 0$.

Ответ: $2y^2 + xy - Cx = 0$.

4. Решить уравнение $(x + \sqrt{x^2 + y^2})\,dy - y\,dx = 0$.

Указание. Используйте замену $z(y) = \frac{x(y)}{y}$.

Ответ: $y^2 - 2Cx = C^2$.

5. Решить уравнение $xy' + y\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) = 0$.

Ответ: $y = xe^{\frac{C}{x}}$.

6. Решить уравнение $(x - y)dx + (2y - x + 1)dy = 0.$

Ответ: $\frac{x^2}{2} + y^2 - xy + y = c.$

7. Решить уравнение $y' = \frac{x - 2y + 3}{2x + y + 1}$.

Ответ: $(y - 1)^2 + 4(x + 1)(y - 1) - (x + 1)^2 = C$.

8. Решить уравнение $(x - y - 3)\,dx - (x + y + 1)\,dy = 0$.

Ответ: $(x - 1)^2 - 2(x - 1)(y + 2) - (y + 2)^2 = C$.

9. Решить задачу Коши $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}, \;\; y(\pi) = 5.$

Ответ: $y = -5\cos x + \sin x.$

10. Решить уравнение $y' - y = e^{x}$.

Ответ: $y = e^{x}(x + C)$.

11. Решить уравнение $xy' - 2y = x^{3} + x$.

Ответ: $y = x^{3} - x + Cx^{2}$.

12. Решить задачу Коши $y' - 2y = e^{-x}$, $y(0) = -1$.

Ответ: $y = -\frac{1}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{2x}$.

13. Решить задачу Коши $y'\cos x - y\sin x = -\cos x - x\sin x$, $y(0) = 2$.

Ответ: $y = x - 2\operatorname{tg} x + \frac{2}{\cos x}$.

14. Решить уравнение $y^{3}dx - (2xy + 3)dy = 0$.

Ответ: $x = cy^{2} - \frac{1}{y}$.

15. Решить уравнение $y' - xy = x^{3}y^{2}$.

Ответ: $y(Ce^{-\frac{x^{2}}{2}} - x^{2} + 2) = 1$, $y = 0$.

16. Решить уравнение $2yy' + y^{2} = x$.

Ответ: $y^{2} = Ce^{-x} + x - 1$.

17. Решить уравнение $xy' + y = y^{2}\ln x$.

Ответ: $y(Cx + \ln x + 1) = 1$, $y = 0$.

18. Решить уравнение $x^{2}y^{2}y' + xy^{3} = 1$.

Ответ: $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{c}{x^{3}}}$.

19. Решить задачу Коши $y' - \frac{y}{x-3} = \frac{y^{2}}{x-3}$, $y(-1) = -2$.

Ответ: $y = \frac{x-3}{1-x}$.

20. Решить уравнение $(2x - y + 2)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0$.

Ответ: $x^{2} - xy + 2x + y^{2} - y = C$.

21. Решить задачу Коши $e^{-y}dx+(2y-xe^{-y})\,dy=0,\quad y(-3)=0$.

Ответ: $xe^{-y}+y^2=-3$.

22. Решить уравнение $x+ye^x+(y+e^x)\,y'=0$.

Ответ: $x^2+2ye^x+y^2=C$.

23. Решить уравнение $(2x+e^{\frac{x}{y}})dx+\left(1-\dfrac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0.$

Ответ: $x^2+ye^{\frac{x}{y}}=c.$

24. Решить уравнение $xdx+ydy=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$

Ответ: $x^2+y^2+2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=c.$

25. Решить уравнение $y(1+xy)dx-xdy=0,$ если известно, что оно имеет интегрирующий множитель $\mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$.

Ответ: $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{2}=c.$