Уравнения, допускающие понижение порядка.
Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Пример 1. Доказать существование и единственность решения задачи Коши $y'' = y^2 + \frac{y'^2}{y} + 3x, \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = 2.$

Решение

Правая часть уравнения – функция $F(x, y, y') = y^2 + \frac{y'^2}{y} + 3x$, которая непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_y = 2y - \frac{y'^2}{y^2}, \; F'_{y'} = \frac{2y'}{y}$ в окрестности точки (0; 1; 2). Поэтому, в силу теоремы существования и единственности, искомое решение существует и единственно.

Пример 2. Показать, что функция $y = y(x)$, неявно заданная уравнением $x = y^2 + y$, является решением уравнения $y'y''' - 3y''^2 = 0.$

Решение

Находим y', y'', y'''. Имеем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y+1}, \text{ так как } \frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy};$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2y+1}\right)\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(2y+1)^3};$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dy}\left(-\frac{2}{(2y+1)^3}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{12}{(2y+1)^5}.$$

Подставив y', y'', y''' в левую часть уравнения $y'y''' - 3y''^2 = 0$, получим

$$\frac{1}{2y+1} \cdot \frac{12}{(2y+1)^3} - 3\frac{4}{(2y+1)^5} \equiv 0.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' = xe^{-x}$ и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 4, \; y' = 0$ при $x = 0$.

Решение

Найдем общее решение последовательным интегрированием данного уравнения:

$$y' = \int xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} x = u, & du = dx \\ e^{-x}dx = dv, & v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c_1,$$

$$y = -\int xe^{-x}dx - \int e^{-x}dx + c_1 x = xe^{-x} + 2e^{-x} + c_1 x + c_2.$$

Воспользуемся начальными условиями $\begin{cases} -1 + c_1 = 0, \\ 2 + c_2 = 4, \end{cases}$ $c_1 = 1,\ c_2 = 2.$

Следовательно, частное решение имеет вид $y = (x+2)e^{-x} + x + 2.$

Пример 4. Решить уравнение $(x-3)y'' + y' = 0.$

Решение

Полагая $y' = z,$ получим уравнение первого порядка $(x-3)\dfrac{dz}{dx} + z = 0.$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем $\dfrac{dz}{z} = -\dfrac{dx}{x-3};$

$$\ln|z| + \ln|x-3| = \ln|c|,\ c \neq 0;\ z(x-3) = c,\ \frac{du}{dx}(x-3) = c;\ y = c\ln|x-3| + c_1.$$

Функция $z = 0$ $(y = c)$ является решением.

Поэтому $y = c\ln|x-3| + c_1,\ \ c, c_1 \in R.$

Пример 5. Найдите общее решение уравнения $y'' + 2xy' = 0.$

Решение

Полагая $y' = z,$ получим $\dfrac{dz}{dx} = -2xz;$ $\dfrac{dz}{z} = -2xdx;$ $z = c_1 e^{-x^2}.$

Решение $z = 0$ не потеряно. Следовательно, $y = c_1\int e^{-x^2}dx + c_2.$

Пример 6. Решить задачу Коши $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y'}{x}\right),\ y = \dfrac{1}{2},\ y' = 1$ при $x = 1.$

Решение

Полагая $y' = z,$ получим $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{x}\left(1 + \ln\dfrac{z}{x}\right).$ Это однородное уравнение. Проинтегрируем его с помощью подстановки $z = ux.$ Имеем

$$\frac{du}{dx}x + u = u(1 + \ln u);\ \frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x};\ \ln|\ln u| = \ln|cx|;\ u = e^{cx};\ z = xe^{cx}.$$

Полагая $x=1$, находим $c=0$. Согласно произведенной замене $\frac{dy}{dx}=x,\ y=\frac{1}{2}x^2+c_1$. Полагая $x=0$, находим $c_1=0$. Окончательно $y=\frac{1}{2}x^2$.

Пример 7. Решить уравнение $2(y')^2=(y-1)y''$.

Решение

Положим $y'=p(y)$. Тогда $y''=p\frac{dp}{dy}$.

Уравнение примет вид $$p\left(2p-(y-1)\frac{dp}{dy}\right)=0.$$

Функция $p=0$ $(y=c)$ является решением.

Пусть $p\neq 0$, тогда $\frac{dp}{2p}=\frac{dy}{y-1}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\ln|p|=\ln|y-1|+\ln|c_1|,\ \Rightarrow p=c_1^2(y-1)^2$.

Так как $p=\frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx}=c_1^2(y-1)^2\ \Rightarrow\ \int\frac{dy}{c_1^2(y-1)^2}=\int dx+c_2$, откуда

$$\frac{-1}{c_1^2}=(x+c_2)(y-1).$$

Функция $y=c$ является особым решением.

Пример 8. Найти решение задачи Коши $y''=-\frac{y'^2+y'^4}{2y},\ y(0)=1,\ y'(0)=2$, предварительно убедившись, что искомое решение существует и единственно.

Решение

Функция $F(x;y;z)=-\frac{y'^2+y'^4}{2y}$ непрерывна и имеет ограниченные частные производные $F'_y=\frac{y'^2+y'^4}{2y^2},\ F'_{y'}=\frac{-(y'+2y'^3)}{y}$ в окрестности точки (0;1;2). Поэтому, в силу теоремы существования и единственности, искомое решение существует и единственно. Положим $y'=p$, где $p=p(y)$ – новая неизвестная функция.

Тогда $y''=p\frac{dp}{dy}$. Относительно $p=p(y)$ мы получим уравнение $p\frac{dp}{dy}=-\frac{p^2+p^4}{2y}$.

Для искомого решения $p \neq 0$. Разделяя переменные, получим

$$-\frac{d(p)^2}{p^2(p^2+1)} = \frac{dy}{y} \quad \text{или} \quad \frac{d(p^2+1)}{p^2+1} - \frac{d(p^2)}{p^2} = \frac{dy}{y},$$

откуда $\ln \dfrac{p^2+1}{p^2} = \ln c|y| \ (c > 0),\ \dfrac{p^2+1}{p^2} = c_1 y \ (c_1 \neq 0).$

Используя начальные условия, находим $c_1 = \dfrac{5}{4}.$

Имеем $\dfrac{p^2+1}{p^2} = \dfrac{5}{4}y,\ p^2+1 = \dfrac{5}{4}p^2 y,\ p = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}y-1}}.$

Согласно произведенной замене, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}y-1}},\ \sqrt{\frac{5}{4}y-1}\,dy = dx,\ \frac{8}{15}\left(\frac{5}{4}y-1\right)^{\frac{3}{2}} = x + c_2.$$

Учитывая начальные условия, найдем $c_2 = \dfrac{1}{15}.$

Поэтому $y = \dfrac{1}{15}(15x+1)^{\frac{2}{3}} + \dfrac{4}{5}.$

Пример 9. Найти кривую, проходящую через точку (1; 1), у которой отрезок, отсекаемый на оси ординат, равен абсциссе точки касания.

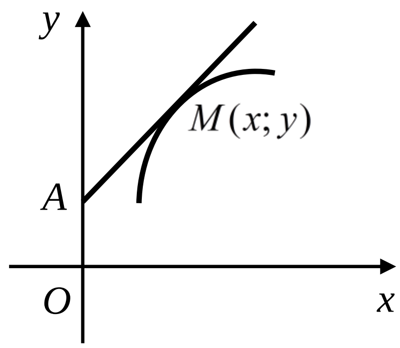

Рис. 1

Решение

В точке $M(x; y)$ проведем касательную к искомой кривой (рис. 1): $Y - y = y'(X - x).$

Полагая $X = 0,$ находим ординату точки A: $Y = y - y'x.$

Получаем дифференциальное уравнение $y - y'x = x,$ или $y' - \dfrac{1}{x}y = -1.$

Это линейное уравнение.

Сделав подстановку Бернулли $y = uv,$ $y' = u'v + uv',$ получим $u''v + u\left(v' - \dfrac{1}{x}v\right) = -1.$

Находим частное решение уравнения $\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}v=0,\ \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x},\ \ln v=\ln x,\ v=x.$

Далее ищем общее решение уравнения $\frac{du}{dx}x=-1.$

Имеем $du=-\frac{dx}{x},\ u=\ln c_1-\ln|x|=\ln\frac{c_1}{|x|}.$

Искомое общее решение принимает вид $y=x\cdot\ln\frac{c}{x}.$

Используя начальное условие, получим $1=\ln c,\ \ c=e.$

Уравнение кривой будет $y=x\ln\frac{e}{x}=x(\ln e-\ln x)=x(1-\ln x).$

Пример 10. Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Температура вынутого из печи хлеба снижается от 100° до $60\,^\circ\mathrm{C}$ за 20 мин. Температура воздуха $25\,^\circ\mathrm{C}$. Через какой промежуток времени (от начала охлаждения) температура хлеба понизится до $30\,^\circ\mathrm{C}$?

Решение

Дифференциальное уравнение охлаждения хлеба будет $\frac{dT}{d\tau}=k(T-t),$ где T – температура хлеба; t – температура окружающего воздуха; k – коэффициент пропорциональности; $\frac{dT}{d\tau}$ – скорость охлаждения хлеба.

Пусть τ – искомое время охлаждения. Тогда, разделяя переменные, получим $\frac{dT}{T-t}=kd\tau$.

Для условий задачи $\frac{dT}{T-25}=kd\tau.$ Интегрируя, получаем

$$\int\frac{d(T-25)}{T-25}=k\int d\tau,\ \ \ln(T-25)=k\tau+\ln c,\ \ T-25=ce^{k\tau}.$$

Произвольную постоянную c определяем из начального условия: при $\tau=0$ $T=100\,^\circ\mathrm{C}$. Отсюда $c=100-25=75$. Подставив в полученное уравнение $T=60$ и $\tau=20$, получаем $e^k=\left(\frac{35}{75}\right)^{\frac{1}{20}}=\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}.$

Уравнение охлаждения хлеба примет вид $T = 75 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}} + 25.$

Отсюда $5 = 75 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}}$, или $\tau = \frac{-20\ln 15}{\ln 7 - \ln 15} \approx 71$ мин.

Пример 11. Найти форму зеркала, собирающего все параллельные лучи в одну точку.

Решение

Очевидно, что зеркало должно иметь форму поверхности вращения, ось которого параллельна направлению падающих лучей. Примем эту ось за ось Ox и найдем уравнение кривой, вращением которой образуется искомая поверхность (рис. 2).

Пусть kM – падающий луч, MO – отраженный луч. В точке M проведем касательную TT_1 к искомой кривой. Так как $\angle T_1MK = \angle TMO = \angle MTO,$ то треугольник MTO является равнобедренным. Следовательно, $|OM| = |OT|$, но $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $|OT|$ найдем из уравнения касательной:

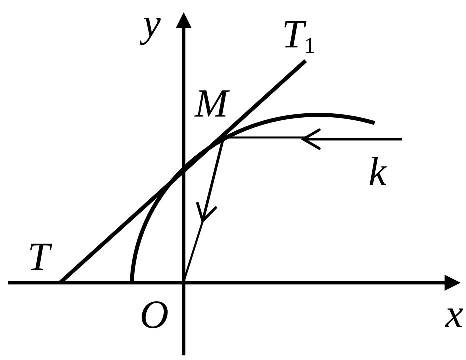

Рис. 2

$Y - y = y'(X - x)$, полагая $Y = 0$, имеем $X = x - \frac{y}{y'}.$

Таким образом получаем дифференциальное уравнение $\sqrt{x^2 + y^2} = -x + \frac{y}{y'}$, или $(x + \sqrt{x^2 + y^2})dy - ydx = 0.$ Это однородное уравнение.

Здесь более целесообразно считать x функцией, а y – аргументом.

Применим подстановку $\frac{x}{y} = t.$

Тогда получим $(\sqrt{t^2y^2 + y^2} + ty)dy - y(tdy + ydt) = 0,$ или $\sqrt{t^2+1}dy - ydt = 0.$

Разделяем переменные и интегрируем:

$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$, $\ln y = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + \ln c_1$ $(y > 0).$

Возвращаясь к переменным x и y: $x + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{c}$ или $y^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right).$

Искомая кривая является параболой, а зеркало имеет форму параболоида вращения

$$y^2 + z^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right).$$

Пример 12. Среднее геометрическое координат точки касания кривой равно отношению отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, к удвоенной ординате точки касания. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку (1; 1).

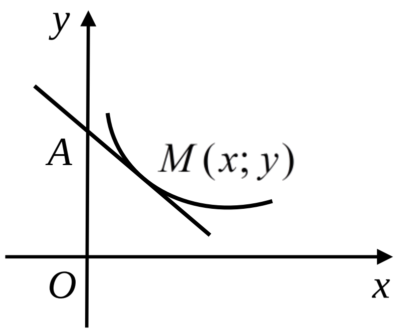

Рис. 3

Решение

В точке $M(x;y)$ проведем касательную к искомой кривой (рис. 3): $\quad Y - y = y'(X - x).$

Полагая $X = 0,$ находим ординату точки A:

$Y = y - y'x.$

Получаем дифференциальное уравнение

$$\sqrt{xy} = \frac{y - y'x}{2y}, \quad \text{или} \quad y' - \frac{1}{x}y = 2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}.$$

Это уравнение Бернулли.

Сделав подстановку $y = uv, \;\; y' = u'v + uv',$ получим

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = 2x^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}, \;\; u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = 2x^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}.$$

Находим частное решение уравнения $v' - \dfrac{1}{x}v = 0, \;\; v = x.$

Находим общее решение уравнения $u'x = 2x^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}},$

$$\frac{1}{2}du \cdot u^{-\frac{3}{2}} = dx, \;\; u = \frac{1}{(x+c)^2}.$$

Искомое общее решение принимает вид $\;y = uv = \dfrac{x}{(x+c)^2}.$

Используя начальное условие $y(1) = 1,$ получаем две интегральные кривые:

$$xy = 1 \;\; \text{и} \;\; x - y(x-2)^2 = 0.$$

Дополнительные задачи

1. Решить уравнение $y''' = x\ln x.$

Ответ: $y = \dfrac{x^4}{24}\ln x - \dfrac{13}{288}x^4 + C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$

2. Решить уравнение $y''' = x^2 - \sin x$.

Ответ: $y = \dfrac{x^5}{60} - \cos x + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

3. Решить задачу Коши $y'' = \dfrac{\ln x}{x^2},\ \ y(1) = 3,\ \ y'(1) = 1$.

Ответ: $y = 2x + 1 - \dfrac{1}{2}\ln^2 x - \ln x$.

4. Решить уравнение $x^3y'' + x^2y' = 1.$

Ответ: $y = C_1\ln x + \dfrac{1}{x} + C_2.$

5. Решить уравнение $y^{\mathrm{IV}} = y''' / x$.

Ответ: $y = C_1x^4 + C_2x^2 + C_3x + C_4$.

6. Решить задачу Коши $xy''' - y'' = x^2 + 1,\ y(-1) = 0,\ y'(-1) = 1,\ y''(-1) = 0.$

Ответ: $y = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{4}$.

7. Решить уравнение $y''' + y''\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}.$

Ответ: $y = -\sin x - C_1\cos x + C_2x + C_3.$

8. Решить задачу Коши $y'' = \dfrac{1}{y^3},\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

Ответ: $x = y^2 - 1.$

9. Решить уравнение $yy'' = y'^2.$

Ответ: $y = C_2e^{C_1x}.$

10. Решить задачу Коши $y'' = e^{2y},\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$

Ответ: $e^{-y} = -x + 1.$

11. Записать уравнение линии, проходящей через точку $A(1;\,0)$, если известно, что отрезок, отсекаемый касательной в любой точке этой линии на оси Oy, равен расстоянию от точки касания до начала координат.

Ответ: $y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$.

12. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $A(1;\,5)$, если угловой коэффициент касательной в любой ее точке M в три раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей точку M с началом координат.

Ответ: $y = 5x^3$.