Линейные уравнения высших порядков

Пример 1. Найти определитель Вронского систем функций:

а) $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x;\ \ J=(-\infty;+\infty);$ б) $3, \cos^2 x, \sin^2 x;\quad J=(-\infty;+\infty);$

в) $x^2, x\cdot|x|;\quad J=(-\infty;+\infty).$

Исследовать данные функции на линейную зависимость.

Решение

а) Находим $W(x)=\begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x^2+2x)e^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix}=$

$$=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix}=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix}=2e^{3x}.$$

Поскольку $W(x)\neq 0,$ данные функции линейно независимы на $J.$

б) $W(x)=\begin{vmatrix} 3 & \cos^2 x & \sin^2 x \\ 0 & -\sin 2x & \sin 2x \\ 0 & -2\cos 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}=0.$

Вывод о линейной зависимости данных функций по их определителю Вронского сделать нельзя. Но так как $\alpha_1\cdot 3+\alpha_2\cos^2 x+\alpha_3\sin^2 x\equiv 0$ при $\alpha_1=-\dfrac{1}{3},\ \alpha_2=\alpha_3=1,$ данные функции являются линейно зависимыми на $J.$

в) Для функции $f(x)=x\cdot|x|$ при $x>0$ $f'(x)=2x=2|x|,$ при

$$x<0\ \ f'(x)=-2x=2|x|,\ \text{при}\ \ x=0\ \ f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot|x|-0}{x}=0=2|x|\Big|_{x=0}.$$

Таким образом, $(x\cdot|x|)'=2x,\ \ x\in J.$

Находим $W(x)=\begin{vmatrix} x^2 & x\cdot|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix}=0.$

Вывод о линейной зависимости данных функций по их определителю Вронского сделать нельзя. Данные функции линейно независимы на $J,$ так как тождество $\alpha_1 x^2+\alpha_2 x\cdot|x|\equiv 0\quad (x\in J)$ выполняется только при $\alpha_1=\alpha_2=0.$ Действительно, при

$x=1$ получаем $\alpha_1+\alpha_2=0;$ при $x=-1$ имеем $\alpha_1-\alpha_2=0.$ Эта система имеет решение $\alpha_1=\alpha_2=0.$

Пример 2. Показать, что функции $y_1=x^2$ и $y_2=x^5$ образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения второго порядка, и найти решение задачи Коши для этого уравнения с начальными условиями $y(1)=1,\ \ y'(1)=-2.$

Решение

Находим определитель Вронского $W(y_1;y_2)=\begin{vmatrix} x^2 & x^5 \\ 2x & 5x^4 \end{vmatrix}=3x^6.$

Следовательно, функции $y_1=x^2$ и $y_2=x^5$ образуют фундаментальную систему решений некоторого однородного линейного уравнения второго порядка, коэффициенты которого являются непрерывными функциями при $x\neq 0.$

Общее решение этого уравнения имеет вид $y=c_1x^2+c_2x^5,$ где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Для решения поставленной задачи Коши необходимо определить значения постоянных c_1 и c_2 так, чтобы выполнялись заданные начальные условия.

Имеем $\begin{cases} c_1+c_2=1, \\ 2c_1+5c_2=-2, \end{cases}$ откуда $c_1=\dfrac{7}{3},\ \ c_2=-\dfrac{4}{3}.$

Поэтому решение данной задачи Коши имеет вид $y=\dfrac{7}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x^5.$

Пример 3. Показать, что функции $y_1=1,\, y_2=x,\, y_3=e^x$ образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения третьего порядка. Составить это уравнение.

Решение

Найдем $W(y_1;y_2;y_3):$

$$W(y_1;y_2;y_3)=\begin{vmatrix} 1 & x & e^x \\ 0 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix}=e^x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=e^x\neq 0\ \ \forall x\in R.$$

Следовательно, данные функции образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения третьего порядка с коэффициентами, непрерывными на $(-\infty; +\infty)$.

Это уравнение имеет вид $W(y; y_1; y_2; y_3) = 0$.

$$W(y; y_1; y_2; y_3) = \begin{vmatrix} y & 1 & x & e^x \\ y' & 0 & 1 & e^x \\ y'' & 0 & 0 & e^x \\ y''' & 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = -e^x \begin{vmatrix} y' & 1 & 1 \\ y'' & 0 & 1 \\ y''' & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} y'' & 1 \\ y''' & 1 \end{vmatrix} = e^x (y'' - y''').$$

Искомое уравнение имеет вид $e^x (y'' - y''') = 0$, или $y''' - y'' = 0$.

Пример 4. Найти общие решения уравнений:

а) $y'' + 5y' + 6y = 0$; б) $y'' - 6y' = 0$;

в) $y'' + 4y' + 4y = 0$; г) $y'' + 2y' + 7y = 0$.

Решение

а) Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ – числа $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$. Фундаментальную систему решений образуют функции e^{-2x}, e^{-3x}.

Общее решение имеет вид $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$.

б) Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 6\lambda = 0$ – числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 6$. Фундаментальную систему решений образуют функции 1 и e^{6x}. Общее решение имеет вид $y = c_1 + c_2 e^{6x}$.

в) Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ – числа $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Фундаментальную систему решений образуют функции e^{-2x} и xe^{-2x}. Общее решение имеет вид $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$.

г) Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 7 = 0$ – числа $\lambda_1 = -1 \pm i\sqrt{6}$. Фундаментальную систему решений образуют функции $e^{-x} \cos\sqrt{6}x$ и $e^{-x} \cos\sqrt{6}x$. Общее решение имеет вид $y = e^{-x}(c_1 \cos\sqrt{6}x + c_2 \sin\sqrt{6}x)$.

Пример 5. Найти общие решения уравнений:

а) $y^{(4)} - 6y''' + 11y'' - 6y' = 0$; б) $y''' + 8y = 0$;

в) $y^{(5)}-3y^{(4)}+3y'''-y''=0;$ г) $y^{(4)}+2y''+y=0;$

д) $y^{(5)}-y^{(4)}+4y'''-4y''+4y'-4y=0.$

Решение

а) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^4-6\lambda^3+11\lambda^2-6\lambda=0$. Имеем

$$\lambda(\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6)=\lambda(\lambda^3-\lambda^2-5\lambda^2+5\lambda+6\lambda-6)=$$

$$=\lambda(\lambda^2(\lambda-1)-5\lambda(\lambda-1)+6(\lambda-1))=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0.$$

Откуда $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2,\ \lambda_4=3.$

Фундаментальную систему решений образуют функции $1,\ e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}$.

Общее решение имеет вид $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}+c_4e^{3x}$.

б) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^3+8=0$. Имеем $(\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+4)=0$. Откуда $\lambda_1=-2,\ \lambda_{2,3}=1\pm i\sqrt{3}$. Фундаментальную систему решений образуют функции $e^{-2x},\ e^x\cos\sqrt{3}x,\ e^x\sin\sqrt{3}x.$

Общее решение имеет вид $y=c_1e^{-2x}+e^x(c_2\cos\sqrt{3}x+c_3\sin\sqrt{3}x).$

в) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^5-3\lambda^4+3\lambda^3-\lambda^2=0$. Имеем $\lambda^2(\lambda-1)^3=0$. Откуда $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_{3,4,5}=1$. Фундаментальную систему решений образуют функции $1,\ x,\ e^x,\ x\,e^x,\ x^2e^x$.

Общее решение имеет вид: $y=c_1+c_2x+e^x(c_3+c_4x+c_5x^2).$

г) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$. Имеем $(\lambda^2+1)^2=0$. Откуда $\lambda_{1,2}=i,\ \lambda_{3,4}=-i$. Фундаментальную систему решений образуют функции $\cos x,\ \sin x,\ x\cos x,\ x\sin x.$

Общее решение имеет вид $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x.$

д) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^5-\lambda^4+4\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda-4=0.$

Имеем $\lambda^4(\lambda-1)+4\lambda^2(\lambda-1)+4(\lambda-1)=0,\ (\lambda-1)(\lambda^2+2)^2=0,$ откуда $\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=\sqrt{2}\,i,\ \lambda_{4,5}=-\sqrt{2}\,i$. Фундаментальную систему решений образуют функции $e^x,\ \cos\sqrt{2}x,\ \sin\sqrt{2}x,\ x\cos\sqrt{2}x,\ x\sin\sqrt{2}x.$

Общее решение имеет вид $y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x)\cos\sqrt{2}x + (c_4 + c_5 x)\sin\sqrt{2}x.$

Пример 6. Применяя метод вариации произвольных постоянных, решить уравнение $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}.$

Решение

Решим соответствующее однородное уравнение $y'' - y = 0.$ Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 1 = 0.$ Откуда $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1.$ Фундаментальную систему решений образуют функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}.$

Общее решение однородного уравнения имеет вид $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$

Общее решение исходного неоднородного уравнения ищем в виде $y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}.$

Составим систему $\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0, \\ c'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x+1}. \end{cases}$

Решая ее, находим: $c_1'(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{e^x+1},\ \ c_2'(x) = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}.$

Интегрируя, имеем: $c_1(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\dfrac{dx}{e^x+1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\dfrac{e^x dx}{e^x(e^x+1)} = \left|e^x = t\right| =$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t(t+1)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + c_1;$$

$$c_2(x) = -\frac{1}{2}\int\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{e^x+1-1}{e^x+1}de^x = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + c_2.$$

Общее решение имеет вид

$$y = \frac{1}{2}((x - \ln(e^x+1))e^x + (-1 + \ln(e^x+1))e^{-x}) + c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Пример 7. Указать вид частных решений для данных неоднородных уравнений:

а) $y'' - 4y = x^2 e^{2x};$ б) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x};$

в) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x;$ г) $y'' - 5y' + 6y = (x^2+1)e^x + xe^{2x};$

д) $y''' + 6y'' + 10y' = xe^{-3x}\cos x + x;$ е) $y''' - 4y' = 3 + e^{2x} + e^{2x}\sin 2x.$

Решение

а) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 4 = 0$. Откуда $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$. Частное решение имеет вид $y^* = x(A_1x^2 + A_2x + A_3)e^{2x}$.

б) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Частное решение имеет вид $y^* = A_1 \sin 2x + A_2 \cos 2x + A_3x^2e^{2x}$.

в) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$. Откуда $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$.

Частное решение имеет вид $y^* = e^x(A_1 \sin x + A_2 \cos x)$.

г) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Откуда $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$.

Частное решение имеет вид $y^* = (A_1x^2 + A_2x + A_3)e^x + x(A_4x + A_5)e^{2x}$.

д) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 10\lambda = 0$. Откуда $\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = -3 \pm i$. Частное решение имеет вид

$$y^* = xe^{-3x}((A_1x + A_2)\cos x + (A_3x + A_4)\sin x) + x(A_5x + A_6).$$

е) Находим корни характеристического уравнения $\lambda^3 - 4\lambda = 0$. Откуда $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2$. Частное решение имеет вид

$$y^* = A_1x + A_2xe^{2x} + e^{2x}(A_4 \sin 2x + A_5 \cos 2x).$$

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y''' - y'' = 3x^2 - 2x + 5$.

Решение

Так как характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 1$, то общим решением соответствующего однородного уравнения $y''' - y'' = 0$ является функция $Y_{\text{о.о}} = c_1 + c_2x + c_3e^x$.

Частное решение уравнения определяется формулой

$$y^* = x^2(A_1x^2 + A_2x + A_3) = A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2.$$

Находим:

$$y^{*\prime} = 4A_1x^3 + 3A_2x^2 + 2A_3x;$$

$$y^{*\prime\prime} = 12A_1x^2 + 6A_2x + 2A_3;$$

$$y^{*\prime\prime\prime} = 24A_1x + 6A_2.$$

Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим

$24A_1x + 6A_2 - 12A_1x^2 - 6A_2x - 2A_3 \equiv 3x^2 - 2x + 5$ или

$(3 + 12A_1)x^2 + (6A_2 - 24A_1 - 2)x + (5 + 2A_3 - 6A_2) \equiv 0,$ откуда

$$\begin{cases} 3 + 12A_1 = 0, \\ 6A_2 - 24A_1 - 2 = 0, \\ 5 + 2A_3 - 6A_2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $A_1 = -\dfrac{1}{4}$, $A_2 = -\dfrac{2}{3}$, $A_3 = -\dfrac{9}{2}$.

Общее решение имеет вид $Y_{\text{о.н}} = c_1 + c_2x + c_3e^x - \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{9}{2}x^2.$

Пример 9. Решить уравнение $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x.$

Решение

Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0,$ откуда $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i.$

Общим решением соответствующего однородного уравнения является функция $Y_{\text{о.о}} = e^x(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x).$

Частное решение уравнения определяется формулой $y^* = A_1\cos 3x + A_2\sin 3x.$

Подставляя функцию y^* и ее производные $y^{*\prime} = -3A_1\sin 3x + 3A_2\cos 3x,$ $y^{*\prime\prime} = -9A_1\cos 3x - 9A_2\sin 3x$ в данное неоднородное уравнение, получим равенство

$$(A_1 - 6A_2)\cos 3x + (6A_1 + A_2)\sin 3x = 37\cos 3x,$$

откуда $\begin{cases} A_1 - 6A_2 = 37, \\ 6A_1 + A_2 = 0. \end{cases}$

Решая систему, находим: $A_1 = 1,$ $A_2 = -6.$

Следовательно, $Y_{\text{о.н}} = e^x(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x) + \cos 3x - 6\sin 3x.$

Пример 10. Решить уравнение $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}.$

Решение

Характеристическое уравнение $\lambda^2+1=0$ имеет корни $\lambda=\pm i$, поэтому общее решение однородного уравнения $Y_{\text{о.о}}=c_1\cos x+c_2\sin x.$

Пользуясь принципом суперпозиции (наложения), частное решение исходного уравнения следует искать в виде $y^*=y^*_1+y^*_2=(A_1x+A_2)e^x+A_3e^{-x}.$

Итак, $$+\left|\begin{array}{l}1\\0\\1\end{array}\right|\begin{array}{l}y^*=(A_1x+A_2)e^x+A_3e^{-x},\\ y^{*\prime}=A_1e^x+(A_1x+A_2)e^x-A_3e^{-x},\\ y^{*\prime\prime}=2A_1e^x+(A_1x+A_2)e^x+A_3e^{-x},\end{array}$$

$$y^{*\prime\prime}+y^*=2A_1xe^x+(2A_1+2A_2)e^x+2A_3e^{-x}\equiv xe^x+2e^{-x}.$$

Отсюда $\begin{cases}2A_1=1,\\ 2A_1+2A_2=0,\\ 2A_3=2,\end{cases}\quad A_1=\dfrac{1}{2},\ A_2=-\dfrac{1}{2},\ A_3=1.$

Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$Y_{\text{о.н}}=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}(x-1)e^x+e^{-x}.$$

Пример 11. Решить уравнение $y''-4y'+4y=xe^{2x}.$

Решение

Характеристическое уравнение $\lambda^2-4\lambda+4=0$ имеет корни $\lambda_1=\lambda_2=2,$ поэтому общее решение однородного уравнения $Y_{\text{о.о}}=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$. Так как число 2 является двукратным корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y^*=x^2(A_1x+A_2)e^x=(A_1x^3+A_2x^2)e^{2x}.$$

Находим:

$$y^{*\prime}=(2A_1x^3+(3A_1+2A_2)x^2+2A_2x)e^{2x},$$

$$y^{*\prime\prime}=(4A_1x^3+(12A_1+4A_2)x^2+(6A_1+8A_2)x+2A_2)e^{2x}.$$

Таким образом,

$$\begin{array}{r|l} 4 & y^* = (A_1x^3 + A_2x^2)e^{2x}, \\ + \; -4 & y^{*\prime} = (2A_1x^3 + (3A_1 + 2A_2)x^2 + 2A_2x)e^{2x}, \\ 1 & y^{*\prime\prime} = (4A_1x^3 + (12A_1 + 4A_2)x^2 + (6A_1 + 8A_2)x + 2A_2)e^{2x}, \end{array}$$

$$y^{*\prime\prime} - 4y^{*\prime} + 4y^* = 6A_1xe^{2x} + 2A_2e^{2x} \equiv xe^{2x}.$$

Отсюда $A_1 = \dfrac{1}{6},\ A_2 = 0.$

Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$Y_{\text{о.н}} = e^{2x}(c_1 + c_2x) + \frac{x^3}{6}e^{2x}.$$

Пример 12. Решить задачу Коши $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1,\ y(0) = \dfrac{1}{8},\ y'(0) = 1.$

Решение

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2,$ поэтому общее решение однородного уравнения: $Y_{\text{о.о}} = c_1 + c_2e^{2x}.$

Пользуясь принципом суперпозиции, частное решение исходного уравнения следует искать в виде $y^* = y^*_1 + y^*_2 = A_1xe^{2x} + A_2x^3 + A_3x^2 + A_4x.$

Подставляя функцию y^* и ее производные

$$y^{*\prime} = 2A_1e^{2x} + 2A_1xe^{2x} + 3A_2x^2 + 2A_3x + A_4,$$

$$y^{*\prime\prime} = 6A_1e^{2x} + 4A_1xe^{2x} + 6A_2x^2 + 2A_3$$

в данное неоднородное уравнение, получим равенство

$$6A_1e^{2x} + 4A_1xe^{2x} + 6A_2x + 2A_3 - 4A_1e^{2x} - 4A_1xe^{2x} - 6A_2x^2 - 4A_3x - 2A_4 \equiv e^{2x} + x^2 - 1,$$

откуда $\begin{cases} 2A_1 = 1, \\ -6A_2 = 1, \\ -6A_2 - 4A_3 = 0, \\ 2A_3 - 2A_4 = -1. \end{cases}$

Решая систему, находим: $A_1 = \dfrac{1}{2},\ A_2 = -\dfrac{1}{6},\ A_3 = -\dfrac{1}{4},\ A_4 = \dfrac{1}{4}.$

Следовательно, $Y_{\text{о.н}} = c_1 + c_2e^{2x} + \dfrac{1}{2}xe^{2x} - \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}x.$

Для того чтобы решить задачу Коши, находим

$$Y'_{\text{о.н}} = 2c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + xe^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

Используя начальные условия, получаем систему для определения c_1 и c_2:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \dfrac{1}{8}, \\ 2c_2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = 1, \end{cases}$$ откуда находим $c_1 = 0,\ c_2 = \dfrac{1}{8}.$

Таким образом, частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, имеет вид $y = \dfrac{1}{8}e^{2x} + \dfrac{1}{2}xe^{2x} - \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}x.$

Дополнительные задачи

1. Решить уравнения:

а) $y'' - y' + y = 0;$

б) $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0;$

в) $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0;$

г) $y'' - 4y' + 3y = 0;$

д) $y'' - 5y' = 0;$

е) $y'' + 6y' + 9y = 0;$

ж) $4y'' - 4y' + y = 0;$

з) $y'' - 2y' + 2y = 0;$

и) $y'' - 6y' + 13y = 0;$

к) $y^{IV} - 16y = 0;$

л) $y^{IV} + 4y = 0.$

Ответы:

а) $y = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2} + C_2 \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right);$

б) $y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x;$

в) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x;$

г) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x};$

д) $y = C_1 + C_2 e^{5x};$

е) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x};$

ж) $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 x e^{\frac{x}{2}};$

з) $y = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x);$

и) $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$;

к) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$; л) $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$.

2. Решить уравнения методом Лагранжа (вариации произвольных постоянных):

а) $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$; б) $y''-y'=e^{2x}\cos e^{x}$;

в) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$; г) $y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x^2+1}$.

Ответы:

а) $y=\left(\dfrac{1}{4}\ln|\cos 2x|+c_1\right)\cos 2x+\left(\dfrac{1}{2}x+c_1\right)\sin 2x$;

б) $y=c_1+c_2e^{x}-\cos(e^{x})$;

в) $y=e^{-2x}(C_1+C_2x)+\dfrac{x^2}{4}e^{-2x}(2\ln x-3)$;

г) $y=e^{x}(C_1+C_2x)+e^{x}\left(x\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)$.

3. Указать вид частного решения уравнения:

а) $y'''+4y''=3x+2$; б) $2y''-7y'+3y=(2x+1)e^{3x}$;

в) $y''+49y=x^3+4x+3\sin 7x$; г) $y''-y'+y=e^{x}\cos x$;

д) $y''+y=x\cos x$; е) $y'''+2y''+y'=(2x+1)\sin x+(x^2-4x)\cos x$;

ж) $y'''-y'=e^{x}\sin x+2x^2$.

Ответы:

а) $y_ч=x^2(Ax+B)$;

б) $y_ч=x(Ax+B)e^{3x}$;

в) $y_ч=Ax^3+Bx^2+Cx+D+x(M\cos 7x+N\sin 7x)$;

г) $y_ч=e^{x}(A\cos x+B\sin x)$;

д) $y_ч=x((Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x)$;

е) $y_ч=(Ax^2+Bx+C)\cos x+(Dx^2+Ex+F)\sin x$;

ж) $y_{ч} = e^{x}(A\cos x + B\sin x) + x(Cx^{2} + Dx + F)$.

4. Решить уравнения:

а) $y''' + 3y'' - y' - 3y = 3x - 14$;

б) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 6e^{-x}$;

в) $y'' + 6y' + 13y = -75\sin 2x$;

г) $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$;

д) $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$;

е) $y''' - y'' = -3x + 1$;

ж) $y'' - y = \cos^{2} x$.

Ответы:

а) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x} - x + 5$;

б) $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^{2}) + x^{3} e^{-x}$;

в) $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 4\cos 2x - 3\sin 2x$;

г) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{-x} + xe^{-2x}$;

д) $y = \frac{1}{3} xe^{3x} + 3x^{2} + 2x + c_1 + c_2 e^{3x}$;

е) $y = \frac{1}{2} x^{3} + x^{2} + c_1 e^{x} + c_2 + c_3 x$;

ж) $y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\cos 2x + c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$.