Системы дифференциальных уравнений

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = xe^{\cos t}. \end{cases}$

Решение

Первое уравнение решается независимо от второго. Разделяя в нем переменные и интегрируя, получим $\dfrac{dx}{x} = \sin t dt,\ \ln|x| = c - \cos t,\ x = c_1 e^{-\cos t}$ $(c_1 \in R)$.

Подставляем найденное значение $x(t)$ во второе уравнение $\dfrac{dy}{dt} = c_1$.

Отсюда $y = c_1 t + c_2$.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{t}, \end{cases} \quad t > 0$.

Решение

Сложив почленно данные уравнения, получим $\dfrac{d}{dt}(x+y) = -\dfrac{1}{t}(x+y)$,

откуда $x + y = \dfrac{c_1}{t}$.

Вычитая почленно исходные уравнения, имеем $\dfrac{d}{dt}(x-y) = \dfrac{1}{t}(x-y)$, откуда $x - y = c_2 - t$.

Из системы уравнений $\begin{cases} x + y = \dfrac{c_1}{t}, \\ x - y = c_2 t \end{cases}$ находим $x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c_1}{t} + c_2 t\right)$,

$y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c_1}{t} - c_2 t\right)$.

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t} - xy^2. \end{cases}$

Решение

Умножив обе части первого уравнения на y, а второго – на x и сложив почленно полученные уравнения, имеем $y\dfrac{dx}{dt}+x\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{xy}{t}$ или $d(xy)=\dfrac{xy}{t}dt.$

Отсюда $xy=c_1t.$

Заменяя в первом уравнении данной системы xy на c_1t, получим $\dfrac{dx}{dt}=c_1tx.$

Интегрируя это уравнение, находим $x=c_2e^{c_1\frac{t^2}{2}}$. Если $c_2\neq 0,$ то $y=\dfrac{c_1t}{x}=\dfrac{c_1}{c_2}te^{c_1\frac{t^2}{2}}$.

Если $c_2=0,$ т. е. $x=0,$ то $y=ct;$ если $y=0,$ то $x=c.$

Пример 4. Найти общее решение системы $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+2y-4z=0,\\ \dfrac{dz}{dx}+y-3z=3x^2\end{cases}$ и частное ее решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-7,\ z(0)=-1\dfrac{3}{4}.$

Решение

Дифференцируем по x первое уравнение: $y''+2y'-4z'=0.$

Подставляем в это уравнение $z'=3x^2-y+3z,$ а затем $z=\dfrac{1}{4}(y'+2y).$

В результате получаем одно дифференциальное уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией y: $y''-y'-2y=12x^2.$

Составим и решим характеристическое уравнение $\lambda^2-\lambda-2=0,\ \lambda_1=-1, \lambda_2=2$.

$Y_{\text{о.о}}=c_1e^{-x}+c_2e^{2x};\ Y_{\text{ч.н}}=A_1x^2+A_2x+A_3;\ Y'_{\text{ч.н}}=2A_1x+A_2;\ Y''_{\text{ч.н}}=2A.$

Находим неизвестные коэффициенты A_1, A_2, A_3:

$2A_1-2A_1x-A_2-2A_1x^2-2A_2x-2A_3\equiv 12x^2,\ \ A_1=-6,\ \ A_2=6,\ \ A_3=-9.$

Следовательно,

$$Y_{\text{о.н}}=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}-6x^2+6x-9,\quad Z_{\text{о.н}}=\frac{y'+2y}{4}=\frac{1}{4}c_1e^{-x}+c_2e^{2x}-3x^2-3.$$

Подставив в полученные соотношения $x=0, y=-7, z=-1\dfrac{3}{4},$ получим

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - 9 = -7, \\ \frac{1}{4}c_1 + c_2 - 3 = -1\frac{3}{4}. \end{cases}$$ Откуда $c_1 = 1,\ c_2 = 1.$

Частное решение имеет вид $\begin{cases} y = e^{-x} + e^{2x} - 6x^2 + 6x - 9, \\ z = \frac{1}{4}e^{-x} + e^{2x} - 3x^2 - 3. \end{cases}$

Пример 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 4z. \end{cases}$ Найти ее частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = -1,\ z = 2$ при $x = 0.$

Решение

Частные решения этой системы ищем в виде $y = \alpha e^{\lambda x},\ z = \beta e^{\lambda x}.$

Составляем характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$ Оно имеет корни $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$

При $\lambda = \lambda_1 = 1$ система уравнений для нахождения α и β имеет вид $\begin{cases} -2\alpha - 2\beta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta = 0. \end{cases}$

Она эквивалентна уравнению $\alpha + \beta = 0,$ одно из решений которого: $\alpha = 1,\ \beta = -1.$

Поэтому характеристическому числу $\lambda = 1$ соответствует частное решение $y_1 = e^x, z_1 = -e^x.$

Аналогично находим частное решение, соответствующее характеристическому числу $\lambda_2 = 2$: $\begin{cases} -3\alpha - 2\beta = 0, \\ 3\alpha + 2\beta = 0. \end{cases}$

Одно из решений этой системы: $\alpha = 2, \beta = -3.$

Таким образом, $y_2 = 2e^{2x},\ z_2 = -3e^{2x}.$

Общим решением системы уравнений будет $\begin{cases} y = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}, \\ z = -c_1 e^x - 3c_2 e^{2x}. \end{cases}$

Найдем частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям. Полагая в общем решении $x = 0, y = -1, z = 2,$ имеем $\begin{cases} -1 = c_1 + 2c_2, \\ 2 = -c_1 - 3c_2, \end{cases}$ откуда

$c_1 = 1, c_2 = -1.$

Поэтому частным решением будет $\begin{cases} y = e^x - 2e^{2x}, \\ z = -e^x + 3e^{2x}. \end{cases}$

Пример 6. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$

Решение

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \ \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Так как характеристическое уравнение имеет корень $\lambda = 2$ кратностью два, частные решения системы ищем в виде $x = (\alpha + \gamma t)e^{2t}, \ y = (\beta + \delta t)e^{2t}$. Подставляя эти выражения в исходные уравнения, получим

$$\begin{cases} \gamma + 2(\alpha + \gamma t) = 3(\alpha + \gamma t) + \beta + \delta t, \\ \delta + 2(\beta + \delta t) = -\alpha - \gamma t + \beta + \delta t. \end{cases}$$

Эти равенства тождественно выполняются тогда и только тогда, когда $\begin{cases} \alpha - \gamma + \beta = 0, \\ \gamma + \delta = 0. \end{cases}$

Полученная алгебраическая система имеет два линейно независимых решения, так как она содержит четыре неизвестных и ранг матрицы системы не равен нулю.

Очевидно, что в качестве таких решений можно взять, например, $\alpha = 1,$ $\beta = -1, \ \gamma = \delta = 0$ и $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = -1.$

Следовательно, найдены два линейно-независимых решения исходных уравнений: $x_1 = e^{2t}, \ y_1(t) = -e^{2t}$ и $x_2 = (1+t)e^{2t}, \ y_2(t) = -te^{2t}.$

Все решения начальной системы уравнений запишутся в виде

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 (1+t) e^{2t}, \\ y = -c_1 e^{2t} - c_2 t e^{2t}. \end{cases}$$

Пример 7. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 2z. \end{cases}$

Решение

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,\ \lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

Построим комплексное решение вида $y = \alpha e^{(2+i)x}$, $z = \beta e^{(2+i)x}$, соответствующее характеристическому числу $\lambda_1 = 2 + i.$ Числа α и β определяем из уравнения $-i\alpha - \beta = 0.$ Полагая $\alpha = 1,$ находим $\beta = -i,$ так что

$$\begin{cases} y = e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i\sin x), \\ z = -ie^{(2+i)x} = e^{2x}(\sin x - i\cos x). \end{cases}$$

Отделяя действительные и мнимые части, получаем два вещественных линейно независимых частных решения:

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x}\cos x, \\ z_1 = e^{2x}\sin x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_2 = e^{2x}\sin x, \\ z_2 = -e^{2x}\cos x. \end{cases}$$

Общим решением системы будет $\begin{cases} y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x), \\ z = e^{2x}(c_1\sin x - c_2\cos x). \end{cases}$

Пример 8. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 - 4x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -x_1 - 2x_3. \end{cases}$

Решение

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda(\lambda^2 - 1) = 0,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1.$$

Частные решения системы будем искать в виде $x_1 = \alpha e^{\lambda t}$, $x_2 = \beta e^{\lambda t}$, $x_3 = \gamma e^{\lambda t}$.

Корню $\lambda_1 = 0$ соответствует система из двух уравнений (третье есть следствие первых двух): $\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0, \\ \beta - 4\gamma = 0. \end{cases}$

Одно из решений: $\alpha = 2,\ \beta = -4,\ \gamma = -1.$

Отсюда получаем одно решение исходной системы:

$x_1^{(1)} = 2e^{0t} = 2,\ x_2^{(1)} = -4e^{0t} = -4,\ x_3^{(1)} = -1e^{0t} = -1.$

Корню $\lambda_2 = 1$ соответствует система $\begin{cases} 2\gamma = 0, \\ -\alpha - 3\gamma = 0. \end{cases}$

Одно из решений: $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 0.$

Получаем второе решение исходной системы: $x_1^{(2)} = 0,\ x_2^{(2)} = e^t,\ x_3^{(2)} = 0.$

Корню $\lambda = -1$ соответствует система $\begin{cases} 2\alpha + 2\gamma = 0, \\ 2\beta - 4\gamma = 0. \end{cases}$

Одно из решений: $\alpha = 1,\ \beta = -2,\ \gamma = -1.$

Отсюда получаем третье решение исходной системы:

$x_1^{(3)} = e^{-t},\ x_2^{(3)} = -2e^{-t},\ x_3^{(3)} = -e^{-t}.$

Общее решение имеет вид

$$x = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{cases} x_1 = 2c_1 + c_3 e^{-t}, \\ x_2 = -4c_1 + c_2 e^t - 2c_3 e^{-t}, \\ x_3 = -c_1 - c_3 e^{-t}. \end{cases}$$

Пример 9. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + 3e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + e^{2t}. \end{cases}$

а) Методом вариации произвольных постоянных.

б) Методом неопределенных коэффициентов.

Решение

а) Рассмотрим однородную систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

Ее решение ищем в виде $x=\alpha e^{\lambda t}$, $y=\beta e^{\lambda t}$, где λ – корень уравнения
$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0,\quad \lambda^2-5\lambda+4=0,\quad \lambda_1=1,\quad \lambda_2=4.$$

Соответствующие корню $\lambda_1=1$ значения α и β определяем из уравнения $2\alpha+2\beta=0.$ Одно из решений этого уравнения есть $\alpha=1,\ \beta=-1.$

Поэтому $x_1=e^t,\ y_1=-e^t$ – решение однородной системы.

Значения α и β, соответствующие второму корню $\lambda=4,$ определяются из уравнения $-\alpha+2\beta=0.$ Числа $\alpha=2,\ \beta=1$ удовлетворяют этому уравнению, поэтому $x_2=2e^{4t}$, $y_2=e^{4t}$ – решение однородной системы.

Общее решение однородной системы имеет вид $\begin{cases} x=c_1e^t+2c_2e^{4t}, \\ y=-c_1e^t+c_2e^{4t}. \end{cases}$

Решение исходной неоднородной системы ищем в виде
$$\begin{cases} x=c_1(t)e^t+2c_2(t)e^{4t}, \\ y=-c_1(t)e^t+c_2(t)e^{4t}. \end{cases}$$

После подстановки этих выражений в начальную систему уравнений получим $\begin{cases} c_1'(t)e^t+2c_2'(t)e^{4t}=3e^{2t}, \\ -c_1'(t)e^t+c_2'(t)e^{4t}=e^{2t}. \end{cases}$

Отсюда $c_1'(t)=\dfrac{1}{3}e^t, c_2'(t)=\dfrac{4}{3}e^{-2t}$ или $c_1(t)=\dfrac{1}{3}e^t+c_1, c_2(t)=-\dfrac{2}{3}e^{-2t}+c_2.$

Подставляем найденные значения $c_1(t)$ и $c_2(t)$ в решение неоднородной системы. Окончательно получим $\begin{cases} x=c_1e^t+2c_2e^{4t}-e^{2t}, \\ y=-c_1e^t+c_2e^{4t}-e^{2t}. \end{cases}$

б) Общее решение линейной неоднородной системы имеет вид $X_{\text{о.н}}=X_{\text{о.о}}+X_{\text{ч.н}}.$

Найдем $X_{\text{ч.н}}=\begin{pmatrix} x_{\text{ч.н}} \\ y_{\text{ч.н}} \end{pmatrix}.$

Так как число 2 не является корнем характеристического уравнения, частное решение системы ищем в виде $x=\alpha e^{2t},\ y=\beta e^{2t}.$

Подставляя эти выражения в данную систему уравнений, получим уравнения для определения коэффициентов α и β: $\begin{cases} 2\alpha = 3\alpha + 2\beta + 3, \\ 2\beta = \alpha + 2\beta + 1, \end{cases}$ $\alpha = -1,\ \beta = -1.$

Таким образом, искомое частное решение есть $x_{\text{ч.н}} = -e^{2t}$, $y_{\text{ч.н}} = -e^{2t}$, а общее решение системы имеет вид $\begin{cases} x = c_1 e^t + 2c_2 e^{4t} - e^{2t}, \\ y = -c_1 e^t + c_2 e^{4t} - e^{2t}. \end{cases}$

Пример 10. Для системы неоднородных линейных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$

запишите структуру ее частного решения.

Решение

Находим корни характеристического уравнения соответствующей однородной системы $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3.$

Так как число 1 является простым корнем характеристического уравнения, а число 4 не является корнем характеристического уравнения, частное решение данной системы имеет вид

$$x_{\text{ч.н}} = (A_1 + A_2 t)e^t + A_3 e^{4t},\ \ y_{\text{ч.н}} = (B_1 + B_2 t)e^t + B_3 e^{4t}.$$

Пример 11. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$

Решение

Найдем общее решение соответствующей однородной системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$

Составим и решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \ \lambda^2 + 1 = 0,\ \ \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Построим комплексное решение вида $x = \alpha e^{it}$, $y = \beta e^{it}$. Числа α и β определяем из уравнения $i\alpha + \beta = 0$. Полагая $\alpha = 1$, находим $\beta = i$.

Таким образом, $x = e^{it} = \cos t + i\sin t,\;\; y = ie^{it} = -\sin t + i\cos t.$

Отделяя вещественные и мнимые части, получаем $\begin{cases} x_1 = \cos t, \\ y_1 = -\sin t; \end{cases}\quad \begin{cases} x_2 = \sin t, \\ y_2 = \cos t. \end{cases}$

Общее решение однородной системы имеет вид $\begin{cases} x = c_1\cos t + c_2\sin t, \\ y = -c_1\sin t + c_2\cos t. \end{cases}$

Решение неоднородной системы ищем в виде $\begin{cases} x = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t, \\ y = -c_1(t)\sin t + c_2(t)\cos t. \end{cases}$

Подставляя эти выражения в исходную систему, получаем

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t = \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Отсюда $c_1'(t) = -\cos t,\;\; c_2'(t) = \dfrac{\sin^3 t}{\cos^2 t}.$

Интегрируя, находим $c_1(t) = -\int \cos t\,dt = c_1 - \sin t,$

$$c_2(t) = \int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}dt = -\int \frac{(1-\cos^2 t)\,d\cos t}{\cos^2 t} = c_2 + \frac{1}{\cos t} + \cos t.$$

Поэтому $\begin{cases} x = c_1\cos t + c_2\sin t + \operatorname{tg} t, \\ y = -c_1\sin t + c_2\cos t + 2. \end{cases}$

Дополнительные задачи

1. Решить системы методом исключения:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 8t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y + 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$

Ответв:

а) $x = C_1e^{-t} + C_2e^{5t},\;\; y = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{5t};$

б) $x = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t},\;\; y = -\dfrac{8}{3}C_1e^{-2t} - C_2e^{3t};$

в) $x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + 2t + \dfrac{7}{4};$

$y = (C_1 - 2C_2)\cos 2t + (2C_1 + C_2)\sin 2t + 10t + \dfrac{15}{4};$

г) $x = C_1 + C_2 e^{2t}, \;\; y = -C_1 + C_2 e^{2t} - e^{t};$

д) $x = -C_2 \cos t + C_1 \sin t + \operatorname{tg} t, \;\; y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2.$

2. Решить систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$ сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка.

Ответ: $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \;\; y = \dfrac{1}{2}(c_1 - c_2)\cos t + (c_1 + c_2)\sin t.$

3. Решить систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$ с помощью характеристического уравнения.

Ответ: $x = c_1 e^{5t} + c_2 e^{t}, \;\; y = 3c_1 e^{5t} - c_2 e^{t}.$

4. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 2z + 2e^{-x}, \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z + e^{-x} \end{cases}$

методом вариации постоянных.

Ответ: $y = -2e^{-x} + c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x}, \quad z = e^{-x} - c_1 e^{x} - 3c_2 e^{2x}.$

5. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 12x - 4y - 12z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + y + 5z. \end{cases}$

Ответ: $x = 2c_1 + c_2 e^{t} + c_3 e^{2t}, \quad y = 3c_1 - 2c_3 e^{2t}, \;\; z = c_1 + c_2 e^{t} + 2c_3 e^{2t}.$