

## Применение дифференциала. Производная сложной функции.

### Производная по направлению

**Пример 1.** Предполагая, что  $x$  и  $y$  малы по абсолютной величине, вывести формулу  $(1+x)^m \cdot (1+y)^n \approx 1+mx+ny$ .

#### Решение

Рассмотрим функцию  $z = (1+x)^m \cdot (1+y)^n$ .

При  $x_0 = y_0 = 0$  имеем  $z_0 = 1$ .

Находим полный дифференциал функции  $z = (1+x)^m \cdot (1+y)^n$  в любой точке:

$$dz = m(1+x)^{m-1} \cdot (1+y)^n \Delta x + n(1+y)^{n-1} (1+x)^m \Delta y.$$

Так как  $z_0 = 1$ ,  $\Delta x = x - x_0 = x$ ,  $\Delta y = y - y_0 = y$ , окончательно получаем

$$(1+x)^m \cdot (1+y)^n \approx z_0 + dz \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} \approx 1 + mx + ny.$$

**Пример 2.** Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить  $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$ .

#### Решение

При  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 2$  имеем  $z_0 = 3$ .

Находим полный дифференциал функции:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{1}{2} ((1+x)^3 + (2+y)^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3(1+x)^2 dx + \\ + \frac{1}{2} ((1+x)^3 + (2+y)^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3(2+y)^2 dy.$$

В нашем случае  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 2$ ,  $z_0 = 3$ ,  $\Delta x = dx = 0,02$ ,  $\Delta y = dy = -0,03$ .

Таким образом,  $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3} \approx z_0 + \frac{\Delta x}{2} - 2\Delta y = 3 + 0,01 - 0,06 = 2,95$ .

**Пример 3.** Закрытый ящик, имеющий наружные размеры  $x = 10$  см,  $y = 8$  см,  $z = 6$  см, сделан из фанеры толщиной 0,2 см. Определить приближенно объем затраченного на ящик материала.

#### Решение

Найдем объем ящика  $V = xyz$ . Объем, затраченного на ящик материала, приближенно равен  $|dV|$ .

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = yz dx + xz dy + xy dz.$$

Так как  $dx = dy = dz = -0,4$ , окончательно получим

$$dV = -8 \cdot 6 \cdot 0,4 - 10 \cdot 6 \cdot 0,4 - 10 \cdot 8 \cdot 0,4 \approx -75.$$

Таким образом, внутренний объем ящика меньше внешнего объема на  $75 \text{ см}^3$ , т. е. объем затраченного на ящик материала приближенно равен  $75 \text{ см}^3$ .

**Пример 4.** Найти  $\frac{dz}{dt}$ , если  $z = \frac{x}{y}$ , где  $x = e^t$ ,  $y = \ln t$ .

**Решение**

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{y} e^t - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{\ln t} e^t - \frac{e^t}{\ln^2 t} \cdot \frac{1}{t} = \frac{e^t(t \ln t - 1)}{t \ln^2 t}.$$

**Пример 5.** Найти  $\frac{du}{dt}$ , если  $u = xyz$ , где  $x = t^2 + 1$ ,  $y = \ln t$ ,  $z = \operatorname{tg} t$ .

**Решение**

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = yz \cdot 2t + xz \cdot \frac{1}{t} + xy \cdot \frac{1}{\cos^2 t} = \\ &= 2t \ln t \cdot \operatorname{tg} t + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{tg} t}{t} + \frac{(t^2 + 1) \ln t}{\cos^2 t}. \end{aligned}$$

**Пример 6.** Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{dz}{dx}$ , если  $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ,  $y = x^2$ .

**Решение**

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left( -\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{2x}{x} = \\ &= -\frac{x^2}{x^2 + x^4} + \frac{2x^2}{x^2 + x^4} = \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

**Пример 7.** Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если  $z = u^2 \ln v$ , где  $u = \frac{x}{y}$ ,  $v = 3x - 2y$ .

**Решение**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \cdot \ln v \cdot \frac{1}{y} + \frac{u^2}{v} \cdot 3 = 2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \ln(3x - 2y) \cdot \frac{1}{y} +$$

$$+ \frac{x^2 \cdot 3}{y^2(3x-2y)} = \frac{2x \ln(3x-2y)}{y^2} + \frac{3x^2}{y^2(3x-2y)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \cdot \ln v \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{u^2}{v}(-2) =$$

$$= 2 \frac{x}{y} \cdot \ln(3x-2y) \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{x^2}{y^2(3x-2y)} \cdot (-2) = -\frac{2x^2 \ln(3x-2y)}{y^3} - \frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}.$$

**Пример 8.** Найти  $\frac{\partial u}{\partial \xi}$  и  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ , если  $u = \ln(x^2 + y^2)$ , где  $x = \xi\eta$ ,  $y = \frac{\xi}{\eta}$ .

**Решение**

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot \eta + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{\eta} = \frac{2\xi\eta^2}{\xi^2\eta^2 + \frac{\xi^2}{\eta^2}} +$$

$$+ \frac{2\frac{\xi}{\eta}}{\xi^2\eta^2 + \frac{\xi^2}{\eta^2}} \cdot \frac{1}{\eta} = \frac{2\xi\eta^4 + 2\xi}{\xi^2\eta^4 + \xi^2} = \frac{2}{\xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot \xi + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot \left(-\frac{\xi}{\eta^2}\right) = \frac{2\xi^2\eta}{\xi^2\eta^2 + \frac{\xi^2}{\eta^2}} -$$

$$- \frac{2\frac{\xi^2}{\eta^2}}{\xi^2\eta^2 + \frac{\xi^2}{\eta^2}} = \frac{2(\eta^4 - 1)}{\eta(\eta^4 + 1)}.$$

**Пример 9.** Показать, что функция  $z = y\varphi(x^2 - y^2)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

**Решение**

Пусть  $x^2 - y^2 = t$  является промежуточным аргументом. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi'(t) \cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(t) + y \cdot \varphi'(t)(-2y).$$

Подставляя частные производные в левую часть уравнения будем иметь

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} y \varphi'(t) \cdot 2x + \frac{1}{y} (\varphi(t) - 2y^2 \varphi'(t)) = 2y \varphi'(t) + \frac{1}{y} \varphi(t) - 2y \varphi'(t) = \frac{y \varphi(t)}{y^2} = \frac{z}{y^2}.$$

**Пример 10.** Найти производную функции  $u = x^2 y z$  в точке  $M_0(2; -3; 1)$  по направлению  $\bar{l} = 4\bar{i} - 3\bar{j} + 12\bar{k}$ .

### Решение

Находим частные производные функции  $u$  в точке  $M_0$ :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = 2xyz \Big|_{M_0} = -12; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = x^2 z \Big|_{M_0} = 4; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = x^2 y \Big|_{M_0} = -12.$$

Определим направляющие косинусы вектора  $\bar{e}$ :

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = \frac{4}{13}; \quad \cos \beta = -\frac{3}{13}; \quad \cos \gamma = \frac{12}{13}.$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = -12 \cdot \frac{4}{13} + 4 \left( -\frac{3}{13} \right) + (-12) \cdot \frac{12}{13} = -15 \frac{9}{13}. \blacktriangle$$

**Пример 11.** Найти производную функции  $u = \ln(xy + yz + xz)$  в точке  $M_0(0; 1; 1)$

по направлению окружности  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 1. \end{cases}$

### Решение

Запишем векторное уравнение окружности  $\bar{r}(t) = \cos t \bar{i} + \sin t \bar{j} + \bar{k}$ .

Найдем вектор  $\bar{\tau}$ , касательный к ней в любой точке  $M$ .

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{dt} = -\sin t \bar{i} + \cos t \bar{j} + 0\bar{k}.$$

Точке  $M_0(0; 1; 1)$  соответствует значение параметра  $t = \frac{\pi}{2}$ .

Тогда  $\left. \bar{\tau} \right|_{M_0} = -\sin \frac{\pi}{2} \bar{i} + \cos \frac{\pi}{2} \bar{j} = -\bar{i}$ . Отсюда следует, что направляющие косинусы

касательной к окружности в точке  $M_0$  равны  $\cos \alpha = -1$ ,  $\cos \beta = 0$ ,  $\cos \gamma = 0$ .

Найдем значения частных производных в точке  $M_0$ :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = \frac{y+z}{xy+yz+xz} \Big|_{M_0} = 2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = \frac{x+z}{xy+yz+xz} \Big|_{M_0} = 1,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = \frac{y+x}{xy+yz+xz} \Big|_{M_0} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial e} \right|_{M_0} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -2.$$

**Пример 12.** Определить угол между градиентами функции  $u = x^2 + y^2 + z^2$  в точках  $A(a; 0; 0)$  и  $B(0; b; 0)$ , ( $ab \neq 0$ ).

### Решение

Имеем:

$$\text{grad } u(A) = \left( \frac{\partial u(A)}{\partial x}; \frac{\partial u(A)}{\partial y}; \frac{\partial u(A)}{\partial z} \right) = (2a; 0; 0);$$

$$\text{grad } u(B) = \left( \frac{\partial u(B)}{\partial x}; \frac{\partial u(B)}{\partial y}; \frac{\partial u(B)}{\partial z} \right) = (0; 2b; 0).$$

Так как скалярное произведение этих ненулевых векторов равно нулю, получаем, что  $\cos \varphi = 0$  т. е.  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

**Пример 13.** Найти в точке  $M_0(2; 1)$  наибольшую скорость роста функции  $z = x^2 y - 2y^3$ .

### Решение

Поскольку функция дифференцируема в точке  $M_0$ , то наибольшая скорость ее роста в этой точке равна модулю ее градиента в этой точке. Находим градиент данной функции в произвольной точке:  $\text{grad } z = (2xy; x^2 - 6y^2)$ .

Выпишем значение градиента в заданной точке  $M_0(2; 1)$ :

$$\text{grad } z(2; 1) = (4; -2).$$

Находим искомую скорость:  $|\text{grad } z(2; 1)| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$ .

### Дополнительные задачи

1. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить  $(1,02)^3 \cdot (0,97)^3$ .

**Ответ:** 0,97.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить, на

сколько изменится диагональ прямоугольника со сторонами 6 м и 8 м, если его первая сторона увеличится на 2 мм, а вторая сторона уменьшится на 5 мм.

**Ответ:** уменьшится на 3 мм.

3. Найти  $\frac{dz}{dt}$ , если  $z = \frac{x}{y}$ , где  $x = e^t$ ,  $y = \ln t$ .

**Ответ:**  $\frac{dz}{dt} = \frac{e^t(t \ln t - 1)}{t \ln^2 t}$ .

4. Найти  $\frac{dz}{dt}$ , если  $z = x^2 - y^2$ , где  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ .

**Ответ:**  $\frac{dz}{dt} = 2 \cos 2t$ .

5. Найти  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$ , если  $z = u^2v - uv^2$ , где  $u = x + 2y$ ,  $v = x - 2y$ .

**Ответ:**  $\frac{dz}{dx} = 8xy$ ;  $\frac{dz}{dy} = 4(x^2 - 12y^2)$ .

6. Найти полный дифференциал функции  $z = x^2 - y^2$ , где  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ .

**Ответ:**  $dz = 2u(\cos 2v du - u \sin 2v dv)$ .

7. Показать, что функция  $z = \varphi(x^2 + y^2)$  удовлетворяет уравнению  $y \frac{dz}{dx} - x \frac{dz}{dy} = 0$ .

8. Найти производную функции  $u = xy + yz + zx$  в точке  $M(2; 1; 3)$  в направлении к точке  $N(5; 5; 15)$ .

**Ответ:**  $\frac{68}{13}$ .

9. Найти производную от функции  $z = 2x^2 - 3y^2$  в точке  $P(1; 1)$  в направлении градиента.

**Ответ:**  $2\sqrt{13}$ .