

**Переходные процессы в электрических цепях.
Расчет переходного процесса в цепях первого порядка**

Пример 3.1.

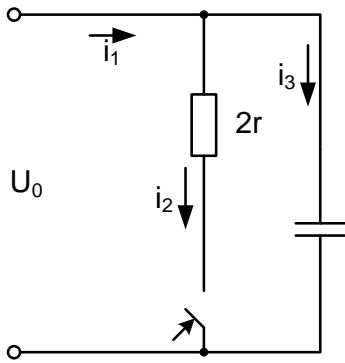


Рис.10. Расчетная схема для примера 3.1

Рассчитать все токи в цепи и напряжение на конденсаторе после замыкания ключа (рис. 10), если

$$U_0 = 30 \text{ В};$$

$$r = 100 \text{ Ом};$$

$$C = 100 \text{ мкФ}.$$

Решение

Система уравнений, составленных по законам Кирхгофа для цепи после коммутации, имеет вид:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3; \\ i_1 r + 2r i_2 = U_0; \\ -2r i_2 + u_C = 0. \end{cases}$$

Сводим систему к одному уравнению. За неизвестную величину примем напряжение u_C , так как напряжение на ёмкости подчиняется закону коммутации

$$\begin{cases} (i_2 + i_3)r + 2r i_2 = U_0 \\ i_2 = \frac{u_C}{2r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3r i_2 + i_3 r = U_0 \\ i_2 = \frac{u_C}{2r} \end{cases} \Rightarrow \frac{3u_C}{2} + i_3 r = U_0.$$

Учитывая, что $i_3 = i_C = C \frac{du_C}{dt}$, получим дифференциальное уравнение с одним неизвестным:

$$\frac{3u_C}{2} + Cr \frac{du_C}{dt} = U_0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид: $Cpr + \frac{3}{2} = 0$. (2)

Его корень $p = -\frac{3}{2Cr} = -\frac{3}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}} = -150 \text{ с}^{-1}$.

Решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв} = u_{Cпр} + Ae^{pt}.$$

Из приведенного примера видно, что составление дифференциальных уравнений – процесс трудоемкий, поэтому решение дифференциального уравнения можно записывать сразу, без составления самого уравнения, в виде суммы принужденной и свободной составляющих. Вид свободной составляющей определим по виду корней характеристического уравнения. Найдем корни характеристического уравнения, используя метод входного сопротивления (см. пример 2.2).

Запишем входное сопротивление цепи после коммутации. Для этого закоротим источник эдс и разомкнем ветвь, содержащую сопротивление r ,

$$Z(p) = r + \frac{2r \frac{1}{pC}}{2r + \frac{1}{pC}}.$$

Приведем дробь к общему знаменателю:

$$Z(p) = \frac{2r^2 + \frac{r}{pC} + \frac{2r}{pC}}{2r + \frac{1}{pC}} = \frac{2r^2 pC + 3r}{2rpC + 1} = \frac{r(2rpC + 3)}{2rpC + 1}.$$

Приравняем $Z(p)$ к нулю ($Z(p) = 0$). Дробь равна нулю, когда числитель дроби будет равен нулю:

$$r(2rpC + 3) = 0 \text{ или } 2rpC + 3 = 0.$$

Получим характеристическое уравнение, аналогичное уравнению (2). Его корень

$$p = -\frac{3}{2Cr} = -\frac{3}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}} = -150 \text{ с}^{-1}.$$

Так, корень характеристического уравнения – один, он является действительным числом, следовательно, напряжение на конденсаторе будет изменяться по закону:

$$u_C = u_{C_{пр}} + u_{C_{св}} = u_{C_{пр}} + Ae^{pt}. \quad (3)$$

Принуждённое значение напряжения на ёмкости равно напряжению на резисторе $2r$:

$$u_{C_{пр}} = u_{2m_{пр}} = 2r i_{пр} = 2r \frac{U_0}{r + 2r} = \frac{30 \cdot 2 \cdot 100}{100 + 200} = 20 \text{ В}.$$

Постоянную интегрирования A найдем из уравнения (3), записанного для $t = 0$:

$$u_C(0) = u_{C_{пр}}(0) + u_{C_{св}}(0), \text{ так как согласно законам коммутации } u_C(0) = U_0,$$

$$\text{то } U_0 = u_{C_{пр}} + A;$$

$$30 = 20 + A;$$

$$A = 10 \text{ В}.$$

Напряжение на конденсаторе $u_C(t)$, В,

$$u_C(t) = 20 + 10e^{-150t}.$$

Ток $i_3(t)$, А, через конденсатор:

$$i_3(t) = C \frac{du_C}{dt} = 10^{-4} (-150) \cdot 10 \cdot e^{-150t} = -0,15e^{-150t}.$$

Ток i_2 , А, можно найти по закону Ома:

$$i_2(t) = \frac{u_C}{2r} = \frac{20 + 10e^{-150t}}{200} = 0,1 + 0,05e^{-150t}.$$

Ток в неразветвлённой части цепи $i_1(t)$, А, определим по первому закону Кирхгофа:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = -0,15e^{-150t} + 0,1 + 0,05e^{-150t} = 0,1 - 0,1e^{-150t}.$$

Пример 3.2.

В электрической цепи, схема которой приведена на рис. 11, замыкается ключ. Требуется определить токи в ветвях и напряжение на индуктивности, если параметры элементов цепи имеют следующие значения: $E = 30$ В, $r_1 = r_2 = r_3 = 10$ Ом, $L = 0,1$ Гн.

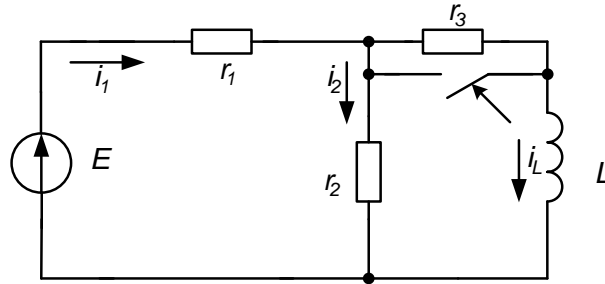


Рис. 11. Расчетная схема примера 3.2

Решение

Составим систему уравнений по законам Кирхгофа для схемы, полученной после коммутации

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_L = 0, \\ u_1 + u_2 = E, \\ u_2 - u_L = 0. \end{cases}$$

Выполнив взаимные подстановки и учитывая, что $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, получим дифференциальное уравнение для тока в индуктивности

$$\frac{L(r_1 + r_2)}{r_2} \frac{di_L}{dt} + r_1 i_L = E.$$

После подстановки в это уравнение значений параметров элементов, получим

$$\frac{di_L}{dt} + 50i_L = 150.$$

Решение этого неоднородного дифференциального уравнения состоит из двух частей $i_L = i_{L_{св}} + i_{L_{пр}}$, где принужденная составляющая тока определяется в установившемся режиме после коммутации и равна

$$i_{L_{пр}} = \frac{E}{r_1} = \frac{30}{10} = 3 \text{ А.}$$

Для определения свободной составляющей решим однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{di_L}{dt} + 50i_L = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид $i_{L_{св}} = Ae^{pt}$, так как характеристическое уравнение $p + 50 = 0$, откуда найдем $p = -50 \text{ с}^{-1}$. Модуль этой величины характеризует скорость уменьшения свободной составляющей тока и называется коэффициентом затухания. Величина, обратная коэффициенту затухания, имеет размерность времени и называется постоянной времени цепи $\tau_L = |1/p| = 0,02 \text{ с}$.

Таким образом,

$$i_L = i_{L_{пр}} + Ae^{pt} = 3 + Ae^{-50t}. \quad (4)$$

При определении постоянной интегрирования A воспользуемся законом коммутации, согласно которому $i_L(0_-) = i_L(0)$. Для вычисления тока $i_L(0_-)$ рассмотрим схему (рис. 12).

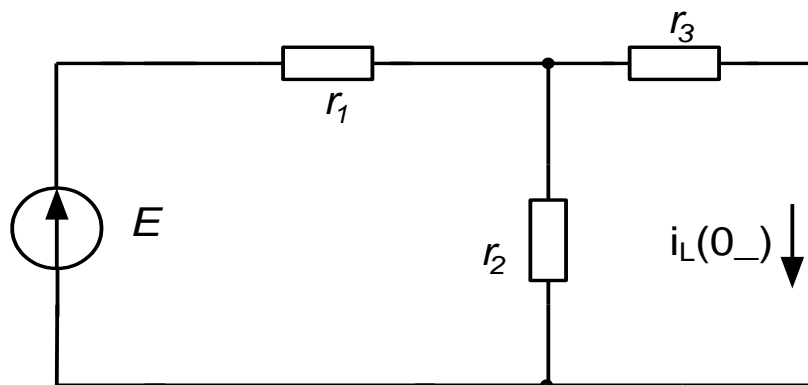


Рис. 12. Схема замещения электрической цепи, приведенной на рис. 11 для докоммутационного режима

На этой схеме индуктивность заменена проводником с нулевым сопротивлением, поэтому ток в ней рассчитаем по методу эквивалентного генератора, преобразуя ветви с источником напряжения E и сопротивлениями r_1 , r_2 к эквивалентному генератору с параметрами $E_{эке}$ и $r_{эке}$.

Эквивалентное сопротивление генератора $r_{\text{экв}}$ найдем как входное сопротивление двухполюсника

$$E_{\text{экв}} = U_{\text{хх}} = ir_2 = \frac{E}{r_2 + r_1} r_2 = \frac{30}{10 + 10} \cdot 10 = 15 \text{ В}$$

$$r_{\text{экв}} = r_{\text{вх}} = r_3 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 10 + \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 15 \text{ Ом.}$$

Схемы для определения $E_{\text{экв}}$ и $r_{\text{экв}}$ представлены на рис. 13 и 14.

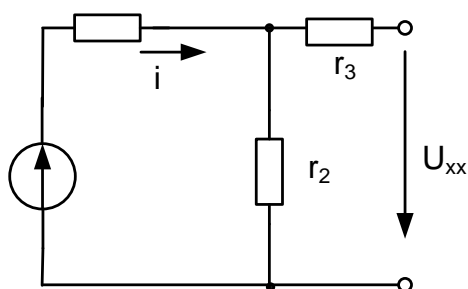


Рис.13. Схема для определения $E_{\text{экв}}$

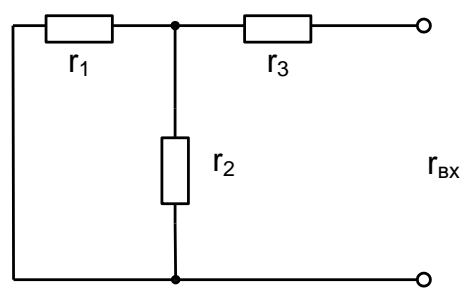


Рис.14. Схема для определения $r_{\text{экв}}$

После определения $E_{\text{экв}}$ и $r_{\text{экв}}$ ток в индуктивности до коммутации определяется (рис. 15) по формуле

$$i_L(0_-) = \frac{E_{\text{экв}}}{r_{\text{экв}}} = \frac{15}{15} = 1 \text{ А.}$$

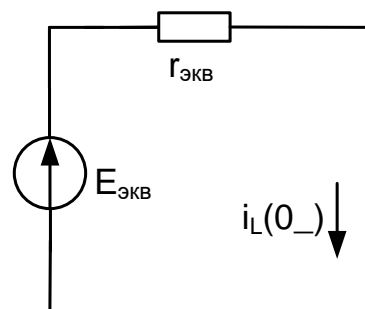


Рис.15. Схема для определения $i_L(0_-)$

Подставив найденное значение в уравнение для полного тока в индуктивности при $t = 0$, получим

$$i_L(0) = i_{Lпр} - A \Rightarrow A = 1 - 3 = -2 \text{ А.}$$

Окончательное решение $i_L(t) = 3 - 2e^{-50t}$.

Напряжение на индуктивности u_L , В, определим по формуле

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = (-ALp)e^{pt} = (-2 \cdot 0,1(-50))e^{-50t} = 10e^{-50t}.$$

Токи в сопротивлениях, А, определим по формулам: $i_2 = \frac{u_L}{r_2}$,

$$i_1 = i_L + i_2 = (3 - 2e^{-50t}) + e^{-50t} = 3 - e^{-50t}.$$

Пример 3.3

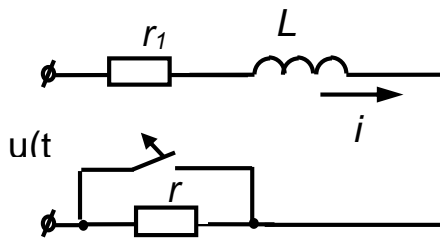


Рис. 16. Расчетная схема примера 3.3

Рассчитать ток в цепи (рис. 16) после размыкания ключа. В цепи действует синусоидальный источник напряжения u , В, $u = 100 \sin(314t - 45^\circ)$. Параметры цепи: $r_1 = 30$ Ом; $r_2 = 70$ Ом; $L = 0,2$ Гн.

Решение

Индуктивное сопротивление цепи $\omega L = 314 \cdot 0,2 = 62,8$ Ом.

Комплексное сопротивление до коммутации:

$$\underline{Z}(0) = r_1 + j\omega L = 30 + j62,8 = 70e^{j64,5^\circ} \text{ Ом.}$$

Начальное значение тока (в первый момент после размыкания ключа) в соответствии с законом коммутации $i(0) = 1,44 \sin(-109,5^\circ) = -1,36$ А.

Характеристическое уравнение для цепи:

$$r_1 + r_2 + Lp = 0;$$

$$p = -\frac{r_1 + r_2}{L} = -\frac{100}{0,2} = -500 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно, в общем виде ток в цепи после коммутации: $i(t) = i_{np}(t) + Ae^{pt}$.

Принуждённое значение тока в цепи:

$$i_{mnp} = \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}_{np}} = \frac{\dot{U}_m}{r_1 + r_2 + j\omega L} = \frac{100e^{-j45^\circ}}{100 + j62,8} = \frac{100e^{-j45^\circ}}{118e^{j32,13^\circ}} = 0,85e^{-j77,1^\circ} \text{ А.}$$

При $t = 0$ имеем:

$$i(0) = i_{np}(0) + A; \Rightarrow -1,36 = 0,85 \sin(-77,1^\circ) + A,$$

откуда:

$$A = -1,36 - 0,85 \sin(-77,1^\circ) = -0,53.$$

Ток в цепи $i(t)$, А, после размыкания ключа

$$i(t) = 0,85 \sin(314 t - 77,1^\circ) - 0,53e^{-500t}.$$