Расчет переходного процесса в цепях второго порядка классическим методом

Пример 5.1

Рассчитать напряжение на конденсаторе и ток в катушке в схеме, приведенной на рис. 21, при закорачивании сопротивления r_2, если $E = 125$ В, $r_1 = 50$ Ом, $r_2 = 200$ Ом, $r_3 = 250$ Ом, $L = 10$ мГн, $C = 5$ мкФ.

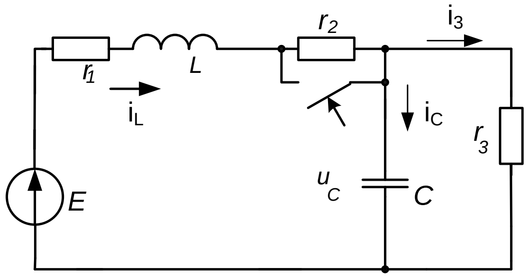

Рис. 21. Расчетная схема для примера 5.1

Решение

1. $t = 0_-$. Анализ цепи до коммутации:

$$i_L(0_-) = \frac{E}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{125}{50 + 200 + 250} = 0{,}25 \text{ А},$$

$$u_C(0_-) = i_L(0_-) r_3 = 0{,}25 \cdot 250 = 62{,}5 \text{ В}.$$

2. $t = 0$. Определение начальных условий.

По законам коммутации

$i_L(0) = i_L(0_-) = 0{,}25$ А,

$u_C(0) = u_C(0_-) = 62{,}5$ В.

Для послекоммутационной цепи составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_L = i_C + i_3, & (5) \\ E = u_L + i_L r_1 + u_C, & (6) \\ 0 = i_3 r_3 + u_C. & (7) \end{cases}$$

Из уравнения (6), записанного для момента $t = 0$, определим напряжение на катушке, а, решая совместно уравнения (5) и (7) для момента коммутации, найдем ток через конденсатор:

$$u_L(0) = E - i_L(0) r_1 - u_C = 125 - 0{,}25 \cdot 50 - 62{,}5 = 50 \text{ В},$$

$$i_C(0) = i_L(0) - \frac{u_C(0)}{r_3} = 0{,}25 - \frac{62{,}5}{250} = 0 \text{ А}.$$

Используя уравнения связи $u_L = L\frac{di_L}{dt}$ и $i_C = C\frac{du_C}{dt}$, найдем скорости изменения тока на катушке индуктивности и напряжения на конденсаторе для момента времени $t = 0$. Это будет являться необходимым условием для нахождения постоянных интегрирования:

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L} = \frac{50}{0{,}01} = 5000 \text{ А/с}, \tag{8}$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{0}{5\cdot 10^{-6}} = 0 \text{ В/с}. \tag{9}$$

3. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения, составленного для цепи после замыкания ключа, может быть представлено в виде: $i_L = i_{Lпр} + i_{Lсв}$ или $u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв}$.

4. $t \to \infty$. Определение принужденной составляющей:

$$i_{L_{пр}} = \frac{E}{r_1 + r_3} = \frac{125}{50 + 250} = 0{,}417 \text{ А},$$

$$u_{C_{пр}} = i_{L_{пр}} \cdot r_3 = 0{,}417 \cdot 250 = 104 \text{ В}.$$

5. $0 < t < \infty$. Определение свободной составляющей.

Составим характеристическое уравнение по методу входного сопротивления. Для этого замыкаем накоротко источник эдс и размыкаем ветвь, содержащую конденсатор.

Схема для написания характеристического уравнения приведена на рис. 22.

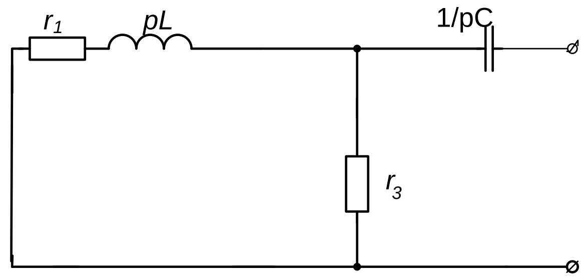

Рис. 22. Схема для написания характеристического уравнения в примере 5.1

Относительно разомкнутых зажимов определим сопротивление, заменяя элементы L на pL, C на $1/pC$

$$Z(p) = \frac{1}{pC} + \frac{(pL + r_1)r_3}{pL + r_1 + r_3} = 0.$$

После того как полученное уравнение приведем к общему знаменателю и числитель приравняем к нулю, уравнение примет вид:

$$p^2 r_3 LC + p(L + Cr_3 r_1) + r_1 + r_3 = 0$$

или в приведенном виде

$$p^2 + p\frac{L + r_1 r_3 C}{r_3 LC} + \frac{r_1 + r_3}{L r_3 C} = 0. \quad (10)$$

Подставим в уравнение (10) численные значения:

$$p^2 + p\frac{10^{-2} + 50 \cdot 250 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{250 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-6}} + \frac{50 + 250}{10^{-2} \cdot 250 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 0,$$

$$p^2 + 5{,}8 \cdot 10^3 p + 2{,}4 \cdot 10^7 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, найдем его корни:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5{,}8 \cdot 10^3 \pm \sqrt{(5{,}8 \cdot 10^3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2{,}4 \cdot 10^7}}{2} =$$

$$= -2900 \pm j3950\, c^{-1}.$$

Процесс носит колебательной характер, затухающий по экспоненциальному закону, а свободные составляющие примут вид:

$$i_{L_{св}} = A_i e^{-\alpha t} sin(\omega\omega + \psi_i) = A_i e^{-2900t} sin(3950\, t + \psi_i),$$

$$u_{C_{св}} = A_u e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \psi_u) = A_u e^{-2900t} \sin(3950\, t + \psi_u),$$

где α – коэффициент затухания; ω – угловая частота собственных колебаний в контуре.

6. Определение постоянных интегрирования. Уравнения для определения свободных составляющих содержат по две постоянных интегрирования: A_i – характеризует амплитуду искомой величины, ψ_i – ее начальную фазу.

Для нахождения A_i, ψ_i необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} i_L(t) = i_{L_{пр}} + A_i e^{-2900t} sin(3950\, t + \psi_i), \\ \dfrac{di_L}{dt} = -2900 A_i e^{-2900t} sin(3950\, t + \psi_i) + 3950 A_i e^{-2900t} cos(3950\, t + \psi_i). \end{cases}$$

Запишем эти уравнения для момента времени $t = 0$, учитывая (8), получим:

$$\begin{cases} 0{,}25 = 0{,}417 + A_i \sin\psi_i, \\ 5000 = A_i(3950\cos\psi_i - 2900\sin\psi_i); \end{cases}$$

$$\begin{cases} sin\psi_i = \dfrac{-0{,}167}{A_i}, & (11) \\ 3950 cos\psi_i = \dfrac{5000}{A_i} + 2900\dfrac{(-0{,}167)}{A_i}. & (12) \end{cases}$$

Из уравнения (12) выразим $\cos\psi_i$, а затем (11) разделим на (12), получим

$tg\psi_i = -0{,}146 \quad \Rightarrow \quad \psi_i = -8{,}3^o$.

Подставляя в (11) значение $\psi_i = -8{,}3^o$, определим

$$A_i = \frac{-0{,}167}{\sin\psi_i} = \frac{-0{,}167}{\sin(-8{,}3^0)} = 1{,}16 .$$

Уравнение для $i_L(t)$, А, имеет вид:

$$i_L(t) = 0{,}417 + 1{,}16e^{-2900t}\sin(3950\, t - 8{,}3^\circ) .$$

Аналогично находятся A_u, ψ_u – необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} u_C(t) = u_{C_{пр}} + A_u t^{-2900}\sin(3590\, t + \psi_u), \\ \dfrac{du_C}{dt} = A_u e^{-2900t}\left[3950\cos(3590\, t + \psi_u) - 2900\sin(3950\, t + \psi_u)\right] \end{cases}$$

Для момента времени $t = 0$, учитывая, что $\left.\dfrac{du_C}{dt}\right|_{t=0} = 0$ В/с, получим:

$$\begin{cases} 62{,}5 = 104 + A_u\, sin\psi_u, \\ 0 = A_u(3950 cos\psi_u - 2900 sin\psi_u). \end{cases}$$

Решая последнюю систему уравнений, найдем $tg\psi_u = 1{,}362$, $\psi_u = 53{,}7^\circ$, $A_u = -51{,}49$ В.

Уравнение для $u_C(t)$, В, имеет вид:

$$u_C(t) = 104 - 51{,}49e^{-2900t}\sin(3950t + 53{,}7^\circ).$$

Пример 5.2.

Найти начальные значения напряжения на катушках индуктивности после замыкания ключа (рис. 23), ток в катушке L_1 при $t \to \infty$, если: U_0 = 100 В; r_1 = 20 Ом; r_2 = 10 Ом, $L = L_1 = L_2 = 0{,}1$ Гн.

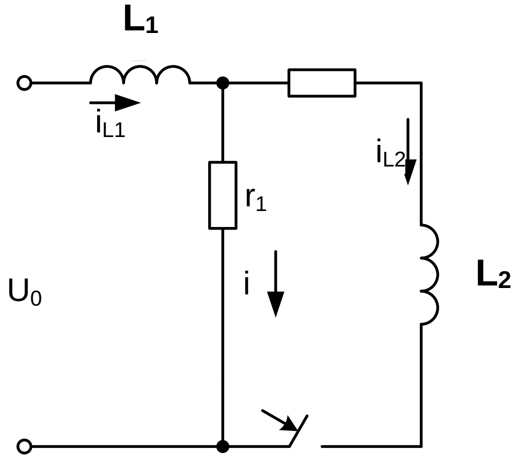

Рис.23. Расчетная схема для примера 5.2

Решение

1. $t = 0_-$. Анализ цепи до коммутации

$i_{L1}(0_-) = \dfrac{U_0}{r_1} = \dfrac{100}{20} = 5$ А,

$i_{L2}(0_-) = 0,$

$u_{L1}(0_-) = 0,$

$u_{L2}(0_-) = 0.$

2. $t = 0.$ Определение начальных условий.

По закону коммутации

$i_{L1}(0) = i_{L1}(0_-) = 5$ А,

$i_{L2}(0) = i_{L2}(0_-) = 0$ А.

Составим уравнения по законам Кирхгофа

$$\begin{cases} i_{L1} = i - i_{L2}, & (13) \\ U_0 = u_{L1} + ir_1, & (14) \\ ir_1 - u_{L2} - i_{L2}r_2 = 0. & (15) \end{cases}$$

Для момента коммутации $t = 0$ из уравнения (13) найдем $i(0)$. Подставляя найденное значение в (14) и (15), определим $u_{L1}(0)$ и $u_{L2}(0)$:

$i(0) = i_{L1}(0) - i_{L2}(0) = 5 - 0 = 0$ А,

$u_{L1}(0) = U - i(0)r_1 = 100 - 5 \cdot 20 = 0$ В,

$u_{L2}(0) = ir_2 - i_{L2}r_2 = 5 \cdot 10 - 0 \cdot 10 = 50$ В.

Зная, что $u_L = L\dfrac{di_L}{dt}$, найдем скорости изменения тока на катушках индуктивности для момента времени $t = 0$:

$$\left.\frac{di_{L1}}{dt}\right|_{t=0} = \frac{u_{L1}(0)}{L} = \frac{0}{0{,}1} = 0 \text{ А/с}, \qquad (16)$$

$$\left.\frac{di_{L2}}{dt}\right|_{t=0} = \frac{u_{L2}(0)}{L} = \frac{50}{0{,}1} = 500 \text{ А/с}. \qquad (17)$$

3. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения, составленного для цепи после замыкания ключа, может быть представлено в виде: $i_{L1} = i_{L1пр} + i_{L1_{св}}$.

4. $t \to \infty$. Определение принужденной составляющей:

$$i_{L1_{пр}} = \frac{U(r_1 + r_2)}{r_1 r_2} = \frac{100 \cdot (20 + 10)}{20 \cdot 10} = 15 \text{ А.}$$

5. $0 < t < \infty$. Определение свободной составляющей.

Составим характеристическое уравнение по методу входного сопротивления. Схема для написания характеристического уравнения приведена на рис. 24.

Само уравнение имеет вид

$$pL + \frac{r_1(r_2 + pL)}{r_1 + r_2 + pL} = 0.$$

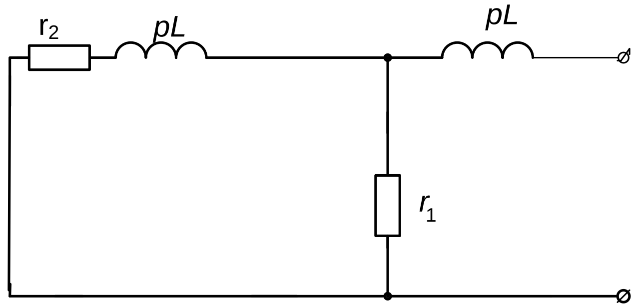

Рис. 24. Схема для написания характеристического равнения примера 5.2

Далее приведем полученное уравнение к общему знаменателю и числитель приравняем к нулю:

$$\frac{pLr_1 + pLr_2 + p^2L^2 + r_1r_2 + r_1pL}{r_1 + r_2 + pL} = 0,$$

$$p^2L^2 + p(Lr_2 + 2Lr_1) + r_1r_2 = 0,$$

$$p^2 \cdot 0{,}1^2 + p(0{,}1 \cdot 10 + 2 \cdot 0{,}1 \cdot 20) + 10 \cdot 20 = 0,$$

$$0{,}01p^2 + 5p + 200 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, найдем его корни:

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4 \cdot 0{,}01 \cdot 200}}{2 \cdot 0{,}01},$$

$p_1 = -43{,}84$ с$^{-1}$, $p_2 = -456{,}2$ с$^{-1}$.

Следовательно, процесс носит апериодический характер, и свободная составляющая примет вид:

$$i_{L1} = A_1 e^{-43{,}84t} + A_2 e^{-456{,}2t}.$$

6. Определение постоянных интегрирования. Уравнение для определения свободной составляющей содержит две постоянных интегрирования, следовательно, для нахождения *A_1 и A_2* решим систему уравнений:

$$\begin{cases} i_{L1} = i_{L1_{пр}} + A_1 e^{-43,84t} + A_2 e^{-456,2t}, \\ \dfrac{di_{L1}}{dt} = -43,84 A_1 e^{-43,84t} - 456,2 A_2 e^{-456,2t}. \end{cases}$$

Для момента времени $t = 0$, учитывая, что $\left.\dfrac{di_{L1}}{dt}\right|_{t=0} = 0$ А/с, получим:

$$\begin{cases} 5 = 15 + A_1 + A_2, \\ 0 = -43,84 A_1 - 456,2 A_2. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим

$$A_1 = -11,063,$$

$$A_2 = 1,063.$$

Уравнение для $i_{L1}(t)$, А, имеет вид:

$$i_{L1}(t) = 15 - 11,063 e^{-43,84t} + 1,063 e^{-456,2t}.$$