

**Расчет переходных процессов операторным методом.
Методика составления операторных схем замещения**

Пример 6.1.

Найти операторное изображение эдс, если:

- а) $E = 200$ В;
б) $e(t) = 200 \sin(314 t + 60^\circ)$ В.

Решение

а) Эдс является величиной постоянной, и согласно приложению, изображением константы A является функция $\frac{A}{p}$. Тогда получим $E(p) = \frac{E}{p} = \frac{200}{p}$.

б) Для нахождения изображения функции $e(t) = 200 \sin(314 t + 60^\circ)$ воспользуемся данными приложению и одним из свойств изображения $F(p) = L\{Af(t)\} = AF\{f(t)\}$

$$E(p) = A \frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2} = 200 \frac{p \sin 60^\circ + 314 \cos 60^\circ}{p^2 + 314^2} = \frac{173,2p + 31400}{p^2 + 98596}.$$

Пример 6.2.

Две параллельные ветви с параметрами $E = 100$ В, $L = 0,1$ Гн, $r_1 = r_2 = r = 10$ Ом, $C = 100$ мкФ подключаются к источнику постоянной эдс E (рис. 25). Необходимо составить операторную схему замещения, записать уравнения для нахождения изображений токов методами: непосредственного применения законов Кирхгофа, контурных токов, узловых потенциалов.

Найти изображение токов цепи. Ответить на вопрос, что изменится в операторной схеме, если данную цепь подключать к источнику синусоидальной эдс.

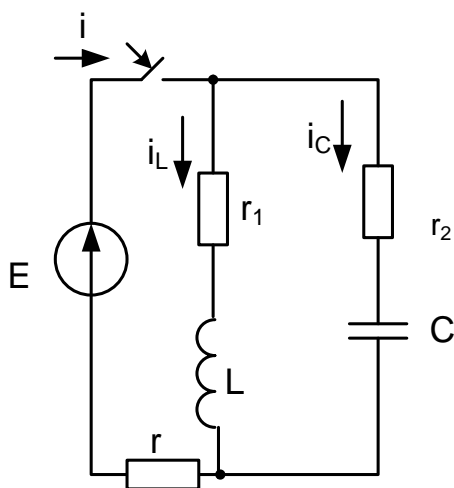


Рис. 25. Расчетная схема для примера 6.2

Решение

1. Составление операторной схемы замещения.

Прежде чем составлять операторную схему, определим независимые начальные условия.

Две параллельные ветви, содержащие катушку индуктивности и конденсатор, подключаются к источнику эдс. В условии задачи не сказано, что конденсатор был предварительно заряжен, следовательно, ток в катушке индуктивности и напряжение на конденсаторе до коммутации равнялись нулю. Тогда согласно законам коммутации

$$i_L(0_-) = i_L(0) = 0 \text{ А и } u_C(0_-) = u_C(0) = 0 \text{ В.}$$

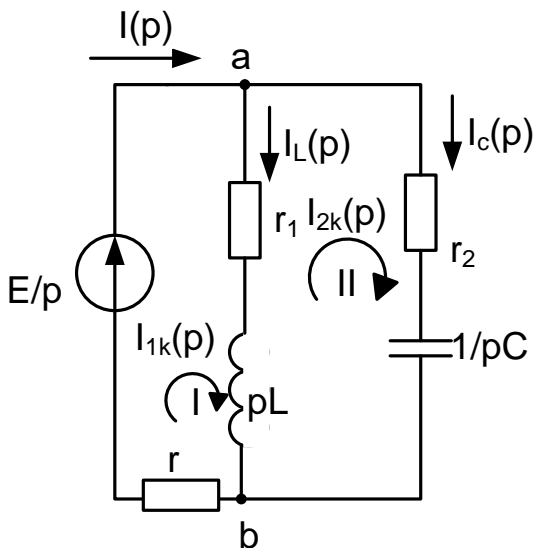


Рис. 26. Операторная схема замещения для примера 6.2

Операторная схема сохраняет конфигурацию послекоммутационной электрической цепи. Следовательно, схема замещения будет состоять из трех ветвей. Первая ветвь содержит только источник постоянной эдс. Согласно прил. 2 изображение эдс будет равно отношению $\frac{E}{p}$. Следуя правилам

составления операторных схем замещения, активное сопротивление переносится без изменения, элемент L заменяется элементом pL , а элемент C на операторной схеме изображается как $1/pC$. Так как начальные условия равны нулю, то в схеме замещения отсутствуют дополнительные источники эдс. Операторная схема замещения приведена на рис. 26.

При замене источника постоянной эдс на источник синусоидальной эдс в операторной схеме изменится только изображение эдс.

2. Уравнения по законам Кирхгофа.

Для операторной схемы замещения составляем уравнения по законам Кирхгофа. Операторная схема замещения содержит три ветви $n_b = 3$, два узла $n_y = 2$. Число уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, $n_y - 1 = 2 - 1 = 1$, по второму закону $-n_b - n_y + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$.

Выберем положительные направления изображений токов и направления обхода двух независимых контуров I и II (рис. 26) и составим уравнения по законам Кирхгофа.

Уравнение для узла a : $I(p) - I_c(p) - I_L(p) = 0$;

для контура I $(r_1 + pL)I_L(p) + rI(p) = E/p$;

для контура II $(r_2 + 1/pC)I_c(p) - (r_1 + pL)I_L(p) = 0$.

3. Составление уравнений по методу контурных токов. Нахождение изображений токов.

Число уравнений, составляемых по методу контурных токов, равно двум $k = n_b - n_y + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$. Зададимся направлениями изображений контурных токов $I_{1k}(p)$, $I_{2k}(p)$ (рис. 26).

Составим уравнения для первого и второго контуров:

$$\begin{cases} (r + r_1 + pL)I_{1k}(p) - (r_1 + pL)I_{2k}(p) = \frac{E}{p}, \\ -(r_1 + pL)I_{1k}(p) + (r_1 + pL + r_2 + \frac{1}{pC})I_{2k}(p) = 0. \end{cases}$$

Подставим числовые значения

$$\begin{cases} (10 + 10 + 0,1p)I_{1k}(p) - (10 + 0,1p)I_{2k}(p) = \frac{100}{p}, \\ -(10 + 0,1p)I_{1k}(p) + (10 + 0,1p + 10 + \frac{1}{100 \cdot 10^{-6} p})I_{2k}(p) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (20 + 0,1p)I_{1k}(p) - (10 + 0,1p)I_{2k}(p) = \frac{100}{p}, \\ -(10 + 0,1p)I_{1k}(p) + (20 + 0,1p + \frac{10^4}{p})I_{2k}(p) = 0. \end{cases}$$

Полученную систему уравнений решим по методу Крамера:

$$\begin{aligned} I_{1k}(p) &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{100}{p} & -10 - 0,1p \\ 0 & 20 + 0,1p + \frac{10^4}{p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 + 0,1p & -10 - 0,1p \\ -10 - 0,1p & 20 + 0,1p + \frac{10^4}{p} \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{\frac{100}{p}(20 + 0,1p + \frac{10^4}{p}) - 0(-10 - 0,1p)}{(20 + 0,1p)(20 + 0,1p + \frac{10^4}{p}) - (-10 - 0,1p)(-10 - 0,1p)} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^3 p + 10p^2 + 10^6}{p^2} = \frac{10p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 10^6}{p(2p^2 + 1,3 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{2k}(p) &= \frac{\begin{vmatrix} 20 + 0,1p & \frac{100}{p} \\ -10 - 0,1p & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 + 0,1p & -10 - 0,1p \\ -10 - 0,1p & 20 + 0,1p + \frac{10^4}{p} \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{0(20 + 0,1p) - \frac{100}{p}(-10 - 0,1p)}{(20 + 0,1p)(20 + 0,1p + \frac{10^4}{p}) - (-10 - 0,1p)(-10 - 0,1p)} = \\ &= \frac{10^3 + 10p}{p} = \frac{10p^2 + 10^3 p}{p(2p^2 + 1,3 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5)}. \end{aligned}$$

Найдем изображения токов, A , в цепи.

$$I(p) = I_{k1}(p) = \frac{10p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 10^6}{p(2p^2 + 1,3 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5)};$$

$$I_c(p) = I_{2K}(p) = \frac{10p^2 + 10^3 p}{p(2p^2 + 1,3 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5)};$$

$$I_L(p) = I_{1k}(p) - I_{2K}(p) = \frac{10p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 10^6}{p(2p^2 + 1,3 \cdot 10^4 p + 2 \cdot 10^5)} -$$

$$- \frac{10p^2 + 10^3 p}{p(2p^2 + 1,3 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5)} = \frac{10^3 p + 10^6}{p(2p^2 + 1,3 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5)}.$$

5. Уравнения по методу узловых потенциалов.

Число уравнений, составляемых по методу узловых потенциалов, равно одному $k = n_y - 1 = 1$.

Примем, что изображение потенциала узла b равно нулю ($\varphi_b(p) = 0$). Запишем уравнение для определения изображения потенциала узла a :

$$(Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p))\varphi_a(p) = Y_1(p) \frac{E}{p},$$

$$\text{где } Y_1(p) = \frac{1}{r}, Y_2(p) = \frac{1}{r_1 + pL}, Y_3(p) = \frac{1}{r_2 + \frac{1}{pC}}.$$

Применяя закон Ома для отдельных ветвей, определим изображения искомых токов по следующим формулам:

$$I(p) = \frac{-\varphi_a(p) + \frac{E}{p}}{r}; \quad I_L(p) = \frac{\varphi_a(p)}{r_1 + pL}; \quad I_c(p) = \frac{\varphi_a(p)}{r_2 + \frac{1}{pC}}.$$

ТАБЛИЦА ОРИГИНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ЛАПЛАСУ

Оригинал	Изображение
A	$\frac{A}{p}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
$e^{j(\omega t + \psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p - j\omega}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t + \psi)$	$\frac{p \cos \psi - \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$
$t^n, n - \text{целое положительное число}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$
$t^n e^{-\alpha t}, n - \text{целое положительное число}$	$\frac{n!}{(p + \alpha)^{n+1}}$
$\frac{t^{\alpha-1} e^{p_n t}}{(\alpha - 1)!}$	$\frac{1}{(p - p_n)^\alpha}$