

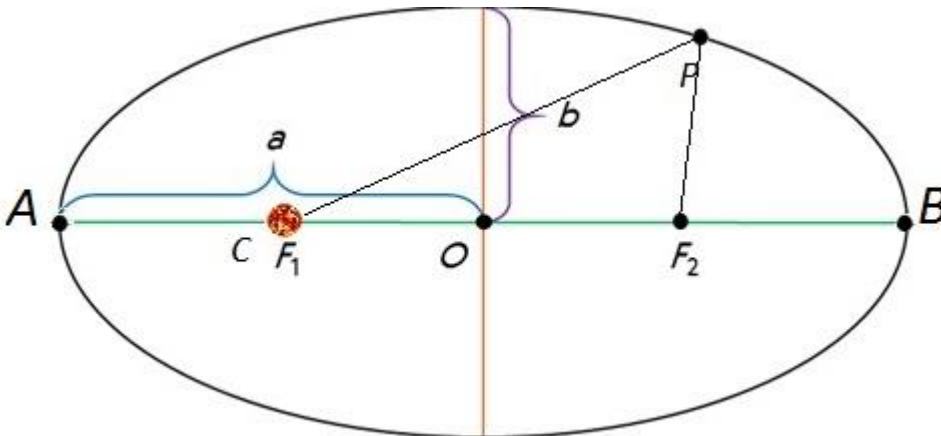
Тема: Законы Кеплера. Определение масс небесных тел

Цель занятия: Освоить методику решения задач, используя законы движения планет.

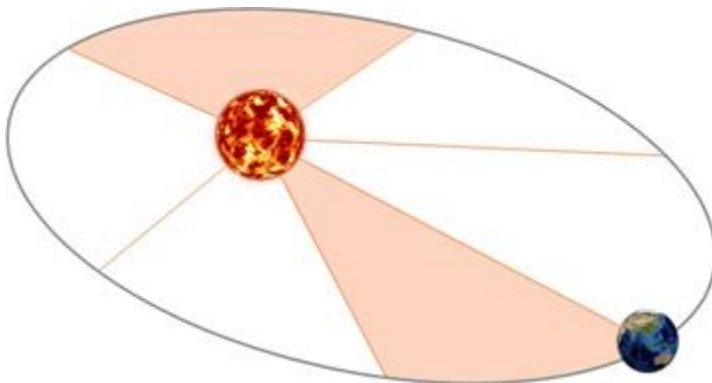
Теоретические сведения

При решении задач неизвестное движение сравнивается с уже известным путём применения законов Кеплера и формул синодического периода обращения.

Первый закон Кеплера. Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце.



Второй закон Кеплера. Радиус-вектор планеты описывает в равные времена равные площади.



Третий закон Кеплера. Квадраты времен обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Для определения масс небесных тел применяют **обобщённый третий закон Кеплера** с учётом сил всемирного тяготения:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} \frac{M_1 + m_1}{M_2 + m_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3},$$

где M_1 и M_2 - массы каких-либо небесных тел, а m_1 и m_2 - соответственно массы их спутников.

Обобщённый третий закон Кеплера применим и к другим системам, например, к движению планеты вокруг Солнца и спутника вокруг планеты. Для этого сравнивают движение Луны вокруг Земли с движением спутника вокруг той планеты, массу которой определяют, и при этом массами спутников в сравнении с массой центрального тела пренебрегают. При этом в исходной формуле индекс надо отнести к движению Луны вокруг Земли массой M_{\oplus} , а индекс 2 – к движению любого спутника вокруг планеты массой M_P . Тогда масса планеты вычисляется по формуле:

$$M_P = \frac{T_L^2}{T_1^2} \cdot \frac{a_1^3}{a_L^3} \cdot M_{\oplus}$$

где T_L и a_L – период и большая полуось орбиты спутника планеты, M_{\oplus} – масса Земли.

Формулы, определяющие соотношение между сидерическим (звёздным) T и синодическим периодами S планеты и периодом обращения Земли T_{\oplus} , выраженными в годах или сутках,

а) для внешней планеты формула имеет вид:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\oplus}}$$

б) для внутренней планеты:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T_{\oplus}}$$

Выполнение работы

Задание 1. За какое время Марс, находящийся от Солнца примерно в полтора раза, чем Земля, совершает полный оборот вокруг Солнца?

Задание 2. Вычислить массу Юпитера, зная, что его спутник Ио совершает оборот вокруг планеты за 1,77 суток, а большая полуось его орбиты – 422 тыс. км

Задание 3. Противостояния некоторой планеты повторяются через 2 года. Чему равна большая полуось её орбиты?

Задание 4. Определите массу планеты Уран (в массах Земли), если известно, что спутник Урана Титания обращается вокруг него с периодом 8,7 сут. на среднем расстоянии 438 тыс. км. для луны эти величины равны соответственно 27,3 сут. и 384 тыс. км.

Задание 5. Марс дальше от Солнца, чем Земля, в 1.5 раза. Какова продолжительность года на Марсе? Орбиты планет считать круговыми.

Задание 6. Синодический период планеты 500 суток. Определите большую полуось её орбиты и звёздный (сидерический) период обращения.

Задание 7. Определить период обращения астероида Белоруссия если большая полуось его орбиты $a=2,4$ а.е.

Задание 8. Звёздный период обращения Юпитера вокруг Солнца $T=12$ лет. Каково среднее расстояние от Юпитера до Солнца?

Примеры решения задач 1-4

Задание 1. За какое время Марс, находящийся от Солнца примерно в полтора раза, чем Земля, совершает полный оборот вокруг Солнца?

Задание 1. Для решения задачи используем третий закон Кеплера: $\frac{T_1^2}{T_\oplus^2} = \frac{a_1^3}{a_\oplus^3}$

Дано:

$$a_1 = 1,5 \text{ а.е.}$$

$$a_\oplus = 1 \text{ а.е.}$$

$$T_\oplus = 1 \text{ г.}$$

Найти:

$$T_1 - ?$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{T_\oplus^2 \cdot a_1^3}{a_\oplus^3}} = \frac{T_\oplus \cdot a_1}{a_\oplus} \sqrt{\frac{a_1}{a_\oplus}}$$

$$T_1 = \frac{1 \cdot 1,5}{1} \sqrt{\frac{1,5}{1}} = 1,5 \sqrt{1,5} \approx 1,9 \text{ г.}$$

Ответ: Марс совершает полный оборот вокруг Солнца примерно за 1,9 года.

Задание 2. Вычислить массу Юпитера, зная, что его спутник Ио совершает оборот вокруг планеты за 1,77 суток, а большая полуось его орбиты – 422 тыс. км

Задание 2. Для решения задачи используем формулу $M_{\text{П}} = \frac{T_{\text{Л}}^2}{T_1^2} \cdot \frac{a_1^3}{a_{\text{Л}}^3} \cdot M_\oplus$

Дано:

$$M_\oplus = 1$$

$$T = 27,32 \text{ сут.}$$

$$a = 3,84 \cdot 10^5 \text{ км}$$

$$T_1 = 1,77 \text{ сут.}$$

$$a_1 = 4,22 \cdot 10^5 \text{ км}$$

Найти:

$$M_{\text{П}} - ?$$

$$M_{\text{П}} = \frac{(27,32)^2 \cdot (4,22 \cdot 10^5)^3}{(1,77)^2 \cdot (3,84 \cdot 10^5)^3} \cdot M_\oplus \approx 317 M_\oplus$$

Ответ: Масса Юпитера составляет примерно 317 масс Земли.

Задание 3. Противостояния некоторой планеты повторяются через 2 года. Чему равна большая полуось её орбиты?

Задание 3. Большую полуось орбиты можно определить из третьего закона Кеплера:

Дано:	$\frac{T^2}{T_{\otimes}^2} = \frac{a^3}{a_{\otimes}^3}$ отсюда: $a^3 = a_{\otimes}^3 \cdot \frac{T^2}{T_{\otimes}^2}$
S=2 года	Звёздный период T найдём из соотношения
$T_{\otimes}=1$ г.	$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\otimes}} - \frac{1}{T}$, $T = \frac{T_{\otimes} \cdot S}{S - T_{\otimes}}$, $T=2$ года
Найти: a-?	$a = \sqrt[3]{\frac{(1 \text{ a.e.})^3 \cdot (2 \text{ года})^2}{(1 \text{ год})^2}} \approx 1,59 \text{ a.e.}$
	$a_{\otimes}=1$ а.е.
	Ответ: $a \approx 1,59$ а.е.

Задание 4. Определите массу планеты Уран (в массах Земли), если известно, что спутник Урана Титания обращается вокруг него с периодом 8,7 сут. на среднем расстоянии 438 тыс. км. для луны эти величины равны соответственно 27,3 сут. и 384 тыс. км.

Задание 4.

Решение

Дано:

$a=438$ тыс. км

$T=8,7$ сут.

$a_L=384$ тыс.км

$T_L=27,3$ сут.

$M_3=1$

Найти: M_Y -?

$$\frac{T^2(M_Y + m_T)}{T_L^2(M_3 + m_L)} = \frac{a^3}{a_L^3}$$

Пренебрегая массами Титания и Луны m_T и m_L получим, что

$$M_Y = \left(\frac{a}{a_L}\right)^3 \cdot \left(\frac{T_L}{T}\right)^2 \cdot M_3 \quad M_Y = \left(\frac{438}{384}\right)^3 \cdot \left(\frac{27,3}{8,7}\right)^2 \cdot 1 = 14,6$$

Ответ: 14.6 массы Земли.