

# 1. Четырехполюсники и их классификация

## 1.1 Основные теоретические положения

Четырехполюсник – электрическая цепь с двумя парами зажимов, включенная таким образом, что через каждую пару зажимов проходят попарно равные и противоположно направленные токи (рис. 1.1).

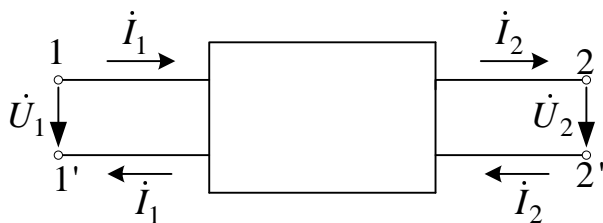


Рис. 1.1

Четырехполюсники имеют важное практическое значение. При анализе электромагнитных процессов в большинстве электротехнических устройств (линиях, усилителях, трансформаторах и т.п.) эквивалентные схемы могут быть представлены в

виде четырехполюсников.

Различают следующие виды четырехполюсников:

- линейные и нелинейные;
- пассивные и активные;
- с сосредоточенными и распределенными параметрами.

## 1.2 Уравнения передачи четырехполюсника

Свойства четырехполюсника как системы передачи энергии определяются соотношениями между напряжениями на его внешних зажимах и токами, проходящими через эти зажимы.

*Уравнения передачи четырехполюсника* – это уравнения, связывающие комплексные амплитуды напряжений и токов на двух парах зажимов четырехполюсника.

Будем излагать все вопросы применительно к установившемуся синусоидальному изменению напряжения, приложенного к входным зажимам.

При этом токи на входе и выходе будут иметь комплексные значения  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ , напряжения –  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ , а общая схема четырехполюсника с обозначениями их направлений имеет вид, показанный на рис. 1.2.

При передаче электрических сигналов слева направо (прямое включение) зажимы 1–1' являются входными, а зажимы 2–2' – выходными. При обратном включении передача энергии происходит от зажимов 2–2', которые являются

входными, к выходным зажимам 1–1' (рис. 1.2).

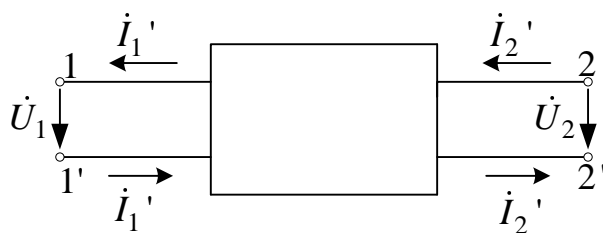


Рис. 1.2

Связь между параметрами режима  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{U}_2$ ,  $\dot{I}_2$  устанавливается при помощи *уравнений передачи четырехполюсника* и некоторых коэффициентов. Эти

коэффициенты входят в уравнения передачи и называются *обобщенными параметрами четырехполюсника*.

Различают следующие формы уравнений передачи четырехполюсника:  
форма *A* (применяется при прямой передаче энергии)

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11} \cdot \dot{U}_2 + A_{12} \cdot \dot{I}_2; & \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}; \\ \dot{I}_1 &= A_{21} \cdot \dot{U}_2 + A_{22} \cdot \dot{I}_2; \end{aligned} \quad (1.1)$$

форма *B* (применяется при обратной передаче энергии)

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= B_{11} \cdot \dot{U}_1 + B_{12} \cdot \dot{I}_1; & \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix}; \\ \dot{I}_2' &= B_{21} \cdot \dot{U}_1 + B_{22} \cdot \dot{I}_1; \end{aligned} \quad (1.2)$$

форма *Z*

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11} \cdot \dot{I}_1 + Z_{12} \cdot \dot{I}_2'; & \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix}; \\ \dot{U}_2 &= Z_{21} \cdot \dot{I}_1 + Z_{22} \cdot \dot{I}_2'; \end{aligned} \quad (1.3)$$

форма *Y*

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11} \cdot \dot{U}_1 + Y_{12} \cdot \dot{U}_2; & \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}; \\ \dot{I}_2' &= Y_{21} \cdot \dot{U}_1 + Y_{22} \cdot \dot{U}_2; \end{aligned} \quad (1.4)$$

форма *H*

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= H_{11} \cdot \dot{I}_1 + H_{12} \cdot \dot{U}_2; & \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}; \\ \dot{I}_2' &= H_{21} \cdot \dot{I}_1 + H_{22} \cdot \dot{U}_2; \end{aligned} \quad (1.5)$$

форма *F*

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= F_{11} \cdot \dot{U}_1 + F_{12} \cdot \dot{I}_2'; & \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix}. \\ \dot{U}_2 &= F_{21} \cdot \dot{U}_1 + F_{22} \cdot \dot{I}_2'; \end{aligned} \quad (1.6)$$

В этих уравнениях *A*; *B*; *Z*; *Y*; *H*; *F* – *обобщенные параметры четырехполюсника*. Размерность параметров очевидна из уравнений четырехполюсника в соответствующей форме. Из уравнений (1.1 – 1.6) видно, что параметры  $A_{11}$  и  $A_{22}$  являются безразмерными величинами,  $A_{12}$  – имеет размерность сопротивления, а  $A_{21}$  – проводимости.

Каждая система параметров полностью определяет четырехполюсник.

Следует заметить, что если в данной системе параметров хотя бы один равен бесконечности, то эта система параметров для рассматриваемого четырехполюсника не существует.

Применение той или иной формы уравнений определяется поставленной задачей и заданной схемой четырехполюсника.

Параметры четырехполюсника можно определять следующими методами:

1) *Метод холостого хода и короткого замыкания.* Применяется в случае простых и сложных схем, а также при определении параметров четырехполюсника экспериментальным путем.

2) *Метод приравнивания коэффициентов* заключается в составлении уравнений по законам Кирхгофа; методом контурных токов; методом узловых напряжений и приведении их к сопоставимому виду с уравнениями передачи и дальнейшим приравниванием коэффициентов.

### 1.3 Схемы замещения четырехполюсников

На рис. 1.3 представлены Г-образная (рис. 1.3, а), Т-образная (рис. 1.3, б), П-образная (рис. 1.3, в), мостовая (рис. 1.3, г) схемы четырехполюсника.

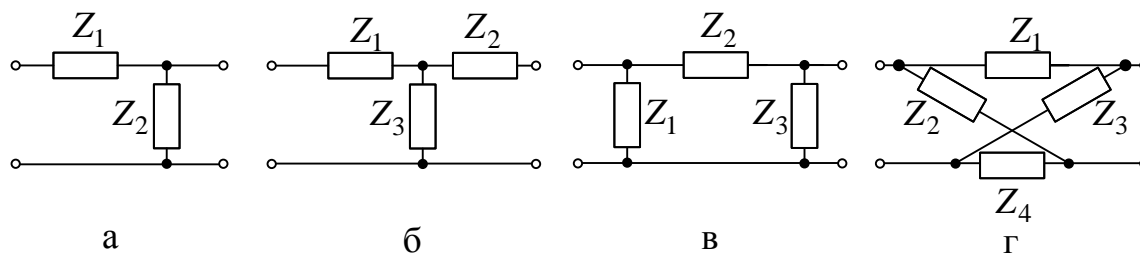


Рис. 1.3

Четырехполюсник называется *структурно-симметричным*, если его левая и правая части зеркально отображают друг друга, например, схема Т-образного симметричного четырехполюсника (рис. 1.4, а).

Структурно-симметричные относятся к категории симметричных четырехполюсников. У симметричных четырехполюсников при перемене местами его входных и выходных зажимов токи и напряжения цепи, в которую включен четырехполюсник, не изменяются. Четырехполюсники, не удовлетворяющие этому условию, называются *несимметричными*.

*Уравновешенными* называются четырехполюсники, верхняя и нижняя части схемы которых зеркально отображают друг друга. Схема такого четырехполюсника является симметричной относительно горизонтальной оси (рис. 1.4, б).

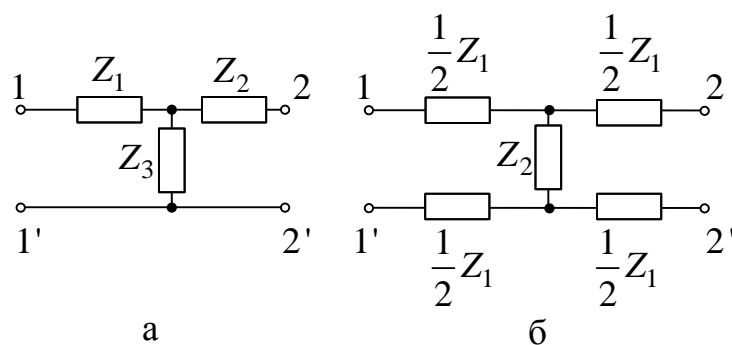


Рис. 1.4

Четырехполюсники, которые удовлетворяют теореме обратимости (взаимности), называются *обратимыми (взаимными)*. В противном случае четырехполюсники называются *необратимыми*. Пассивные четырехполюсники, содержащие только пассивные элементы, являются обратимыми, т. е. отвечают свойству обратимости: отношение напряжения на входе к току на выходе (передаточное сопротивление) не зависит от того, какая пара зажимов является входной и выходной.

Определитель матрицы  $|A|$  обратимого четырехполюсника равен 1: если пассивный четырехполюсник симметричный, то

$$A_{11} = A_{22}; \quad Z_{11} = Z_{22}; \quad Y_{11} = Y_{22}.$$

Таким образом, у пассивного несимметричного четырехполюсника три параметра в каждой системе параметров позволяют найти четвертый параметр и полностью характеризуют четырехполюсник. Симметричный пассивный четырехполюсник определяется двумя параметрами.

## 1.4 Характеристические параметры четырехполюсника

Наряду с обобщенными параметрами в теории четырехполюсников применяются характеристические параметры: *характеристические сопротивления и характеристическая постоянная передачи*.

Характеристические параметры выгодно применять по сравнению с А-параметрами при расчетах каскадного соединения четырехполюсников.

### 1.4.1 Характеристическое сопротивление

Несимметричный четырехполюсник имеет два характеристических сопротивления:  $Z_{1c}$  – со стороны входа (со стороны зажимов 1–1' (рис. 1.5, а));  $Z_{2c}$  – со стороны выхода (со стороны зажимов 2–2' (рис. 1.5, б)).

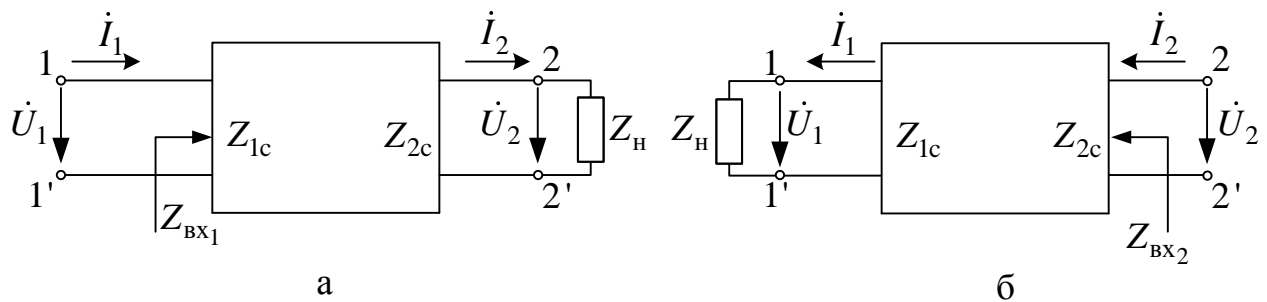


Рис. 1.5

Характеристические сопротивления удовлетворяют следующим условиям:

1. Входное сопротивление  $Z_{\text{BX1}}$  четырехполюсника, нагруженного на  $Z_{\text{H}} = Z_{2\text{c}}$  (рис. 1.5, а), равно  $Z_{1\text{c}}$  ( $Z_{\text{BX1}} = Z_{1\text{c}}$ ).
2. Входное сопротивление четырехполюсника, нагруженного на  $Z_{\text{H}} = Z_{1\text{c}}$  (рис. 1.5, б) равно  $Z_{2\text{c}}$  ( $Z_{\text{BX2}} = Z_{2\text{c}}$ ).

Условие, когда четырехполюсник нагружен на соответствующее характеристическое сопротивление, называется *условием согласованной нагрузки* или *согласованным включением*.

Режим работы четырехполюсника,  $Z_{1\text{c}}$  которого равно внутреннему сопротивлению генератора, а  $Z_{2\text{c}}$  равно сопротивлению нагрузки, называется *режимом полного согласования* (рис. 1.6).

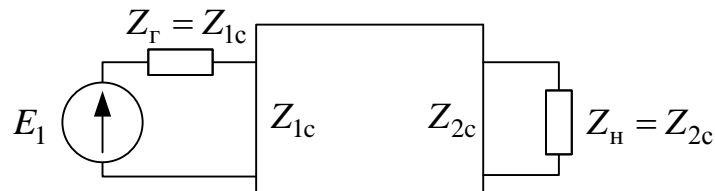


Рис. 1.6

Характеристические сопротивления определяются выражениями:

$$Z_{1\text{c}} = \sqrt{Z_{1\text{k}} \cdot Z_{1\text{x}}}; \quad Z_{2\text{c}} = \sqrt{Z_{2\text{k}} \cdot Z_{2\text{x}}},$$

где  $Z_{1\text{k}}$  и  $Z_{1\text{x}}$  – сопротивления короткого замыкания и холостого хода соответственно со стороны входных зажимов;

$Z_{2\text{k}}$  и  $Z_{2\text{x}}$  – сопротивления короткого замыкания и холостого хода соответственно со стороны выходных зажимов.

Следовательно, *характеристическим сопротивлением четырехполюсника* называется среднее геометрическое из соответствующих его сопротивлений холостого хода и короткого замыкания.

Через  $A$ -параметры характеристические сопротивления выражаются следующим образом:

$$Z_{1c} = \sqrt{\frac{A_{11} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{22}}}; \quad Z_{2c} = \sqrt{\frac{A_{22} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{11}}}.$$

Симметричный четырехполюсник имеет одно характеристическое сопротивление, т.к. для него  $A_{11} = A_{22}$ :

$$Z_{1c} = Z_{2c} = Z_c = \sqrt{Z_k \cdot Z_x} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}.$$

Это означает, что всякому симметричному четырехполюснику соответствует некоторое характеристическое сопротивление  $Z_c$ , обладающее следующим свойством – если нагрузить данный четырехполюсник сопротивлением  $Z_H = Z_c$ , то отношение напряжения к току на входе и выходе будет одинаковым:

$$Z_H = Z_c = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2}. \quad (1.7)$$

### 1.4.2 Характеристическая постоянная передачи

Характеристическая (или собственная) постоянная передачи четырехполюсника для прямого направления передачи энергии равна:

$$g = a + jb, \quad (1.8)$$

где  $g$  – комплексное число,

$a$  – характеристическое (собственное) затухание, измеряется в неперах (Нп);

$b$  – характеристическая (собственная) фазовая постоянная, измеряется в радианах.

Характеристическая постоянная передачи определяется величиной обратной функции передачи по току или напряжению

$$e^g = e^a e^{jb} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{U_1}{U_2} e^{j(\psi_{U_1} - \psi_{U_2})} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{I_1}{I_2} e^{j(\psi_{i_1} - \psi_{i_2})}$$

или

$$g = a + jb = \ln \frac{U_1}{U_2} + j(\psi_{U_1} - \psi_{U_2}) = \ln \frac{I_1}{I_2} + j(\psi_{i_1} - \psi_{i_2}).$$

Затуханию 1Нп соответствует уменьшение амплитуды или действующего значения напряжения или тока в  $e = 2,718$  раза.

Следует заметить, что характеристическая постоянная передачи, а следовательно,  $a$  и  $b$  определяются *при условии согласованной нагрузки*.

Заметим, если известны А-параметры, то в практических расчетах используется формула:

$$g = \ln\left(\sqrt{A_{11} \cdot A_{22}} + \sqrt{A_{12} \cdot A_{21}}\right).$$

### **1.5 Комплексная передаточная функция. Амплитудочастотная и фазочастотная характеристики четырёхполюсника**

Частотные характеристики линейной цепи отражают ее реакцию на гармоническое воздействие. Они определяются комплексной передаточной функцией:

$$K(j\omega) = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1},$$

представляющей собой отношение комплексных амплитуд реакции (напряжения или тока на выходе четырехполюсника) и воздействия (напряжения или тока на входе четырехполюсника).

При определении передаточной функции необходимо помнить, что именно выходная величина делится на входную.

В частных случаях в качестве комплексной передаточной функции могут выступать коэффициент передачи по напряжению  $K_U(j\omega)$ ; коэффициент передачи по току  $K_I(j\omega)$ .

Комплексную передаточную функцию можно представить в алгебраической показательной формах записи:

$$K(j\omega) = K_1(\omega) + jK_2(\omega) = K(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}. \quad (1.9)$$

Выражение (1.9) представляет собой запись двух характеристик: амплитудночастотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ).

АЧХ – это зависимость модуля передаточной функции от частоты  $K(\omega)$ ;  
ФЧХ – это зависимость аргумента передаточной функции от частоты  $\varphi(\omega)$ .

$K(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  определяются по формулам (1.10, 1.11).

$$K(\omega) = \sqrt{K_1^2(\omega) + K_2^2(\omega)}; \quad (1.10)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{K_2(\omega)}{K_1(\omega)}. \quad (1.11)$$

*Пример:* для четырехполюсника рис. 1.7 найти выражения АЧХ и ФЧХ. Качественно построить эти характеристики.

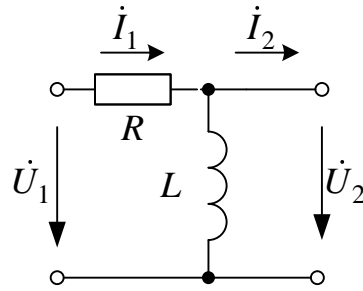


Рис. 1.7

Рассчитаем комплексную передаточную функцию по напряжению в режиме холостого хода:

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_1 \cdot j\omega L}{\dot{I}_1 \cdot (R + j\omega L)} = \frac{\dot{I}_1 \cdot j\omega L \cdot (R - j\omega L)}{\dot{I}_1 \cdot (R + j\omega L) \cdot (R - j\omega L)} = \frac{(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2} + j \frac{R \cdot \omega L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Рассчитываем АЧХ, используя формулу (1.10):

$$K(\omega) = \sqrt{\left(\frac{(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2}\right)^2 + \left(\frac{R \cdot \omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(\omega L)^4 + (R \cdot \omega L)^2}{(R^2 + (\omega L)^2)^2}} = \frac{\omega L \cdot \sqrt{(\omega L)^2 + R^2}}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{(\omega L)^2} + 1}}; \quad (1.12)$$

Рассчитываем ФЧХ, используя формулу (1.11):

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{R \cdot \omega L \cdot (R + (\omega L)^2)}{(R^2 + (\omega L)^2) \cdot (\omega L)^2} = \arctg \frac{R}{\omega L}. \quad (1.13)$$

Проанализируем выражения (1.17, 1.18) для трех значений частот:

$$\omega_1 = 0; \quad K_1(\omega_1) = 0; \quad \varphi_1(\omega_1) = 90^\circ;$$

$$\omega_2 = \frac{R}{L}; \quad K_2(\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \varphi_2(\omega_2) = 45^\circ;$$

$$\omega_3 \rightarrow \infty; \quad K_3(\omega_3) \rightarrow 1; \quad \varphi_3(\omega_3) = 0^\circ.$$

На рис. 1.8 представлены АЧХ и ФЧХ данного четырехполюсника:

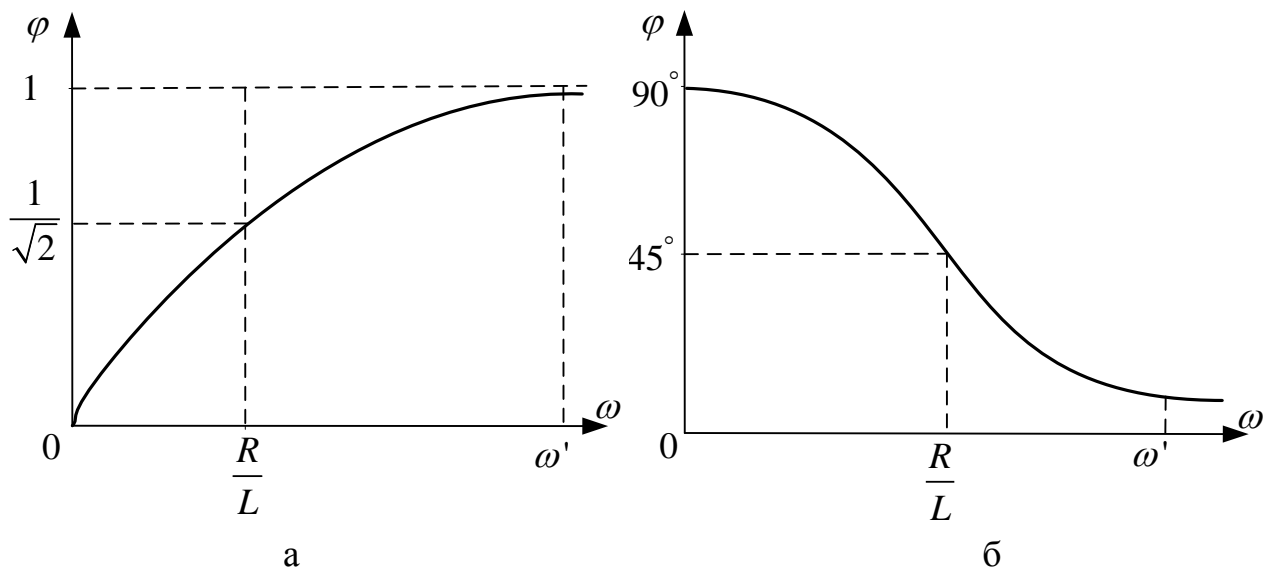


Рис. 1.8

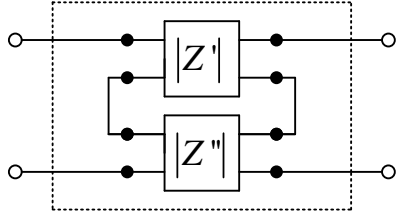
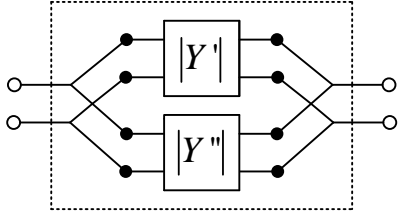
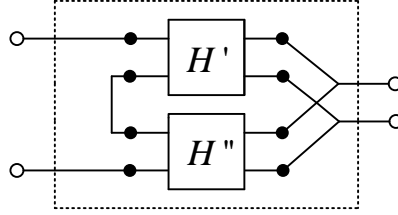
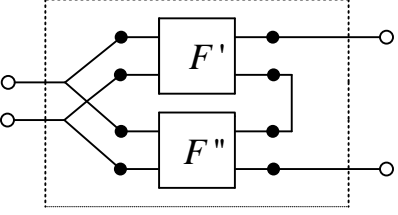
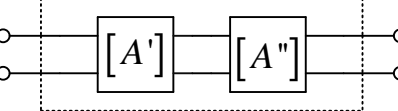
Вывод: рабочим диапазоном частот для данного четырехполюсника является диапазон от  $\frac{R}{L}$  до  $\omega'$ , а сдвиг фаз между напряжением на входе и выходе равен нулю, что говорит нам о том, что сигнал, поданный на вход четырехполюсника, проходит через него без искажений.

### 1.6 Расчет параметров сложных четырехполюсников. Регулярность соединения

Сложные четырехполюсники рассматривают как различные соединения простых четырехполюсников. Существуют следующие способы соединения: последовательное, параллельное, последовательно-параллельное, параллельно-последовательное и каскадное.

Эти способы соединений и формулы для определения соответствующих матриц сложного четырехполюсника приведены в табл. 1.

Схемы соединения четырехполюсников

Соединение	Схема	Формулы для определения параметров
Последовательное	 <p style="text-align: center;">Рис. 1.9</p>	$[Z] = [Z'] + [Z'']$
Параллельное	 <p style="text-align: center;">Рис. 1.10</p>	$[Y] = [Y'] + [Y'']$
Последовательно-параллельное	 <p style="text-align: center;">Рис. 1.11</p>	$[H] = [H'] + [H'']$
Параллельно-последовательное	 <p style="text-align: center;">Рис. 1.12</p>	$[F] = [F'] + [F'']$
Каскадное	 <p style="text-align: center;">Рис. 1.13</p>	$[A] = [A'] \cdot [A'']$

При умножении матриц нужно следить за тем, чтобы матрицы-сомножители следовали в том порядке, в каком осуществляется передача энергии двумя каскадно-соединенными четырехполюсниками.

Все указанные в табл. 1 формулы справедливы только в случае *регулярного соединения* четырехполюсников, при котором параметры отдельных четырехполюсников после соединения остаются неизменными.

*Условие регулярности* формулируется следующим образом: при соединении четырехполюсников для любой общей нагрузки токи, проходящие через оба первичных и оба вторичных зажима, должны быть соответственно равны по величине и противоположны по направлению (для каждого четырехполюсника).

Примером *нерегулярного соединения* двух простых четырехполюсников служит сложный четырехполюсник, представленный на рис. 1.14.

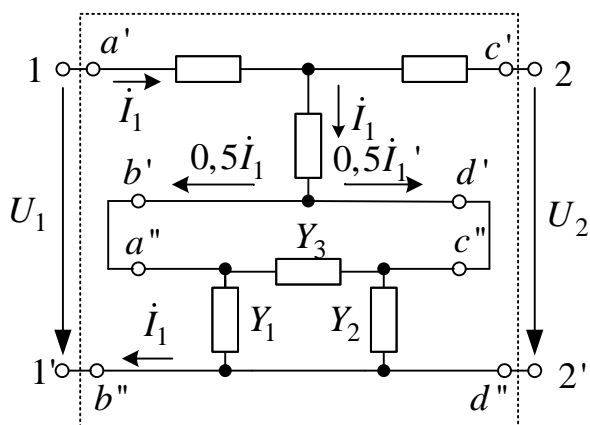


Рис. 1.14

При равенстве проводимостей  $Y_1$  и  $Y_2$  в разомкнутых зажимах 2–2' ток  $I_1$  распределяется так, как показано на рис. 1.14. Токи во входных и выходных ветвях простых четырехполюсников не равны. Следовательно, условие регулярности не выполняется ни для первого, ни для второго четырехполюсника.

Кроме того, при нерегулярном соединении четырехполюсников может изменяться значение матрицы параметров одного из четырехполюсников. Например, при соединении двух четырехполюсников, изображенных на рис. 1.14, элемент  $Y_3$  замыкается накоротко нижней ветвью первого четырехполюсника. Таким образом, матрица  $Y$ -параметров нижнего четырехполюсника, когда он изолирован, будет отличаться от матрицы  $Y$ -параметров, когда он соединен параллельно (в данном примере) с другим четырехполюсником.

При соединении простых четырехполюсников необходимо убедиться, что все их параметры сохраняют свои значения.

Прежде чем указать виды регулярного соединения четырехполюсников, рассмотрим понятия «трехполюсного» четырехполюсника.

На рис. 1.15 указаны четырехполюсники, внутри схемы которых зажимы 1'–2' соединены накоротко. Условно схемы таких четырехполюсников можно изобразить, как показано на рис. 1.16. Поэтому их называют «трехполюсными».

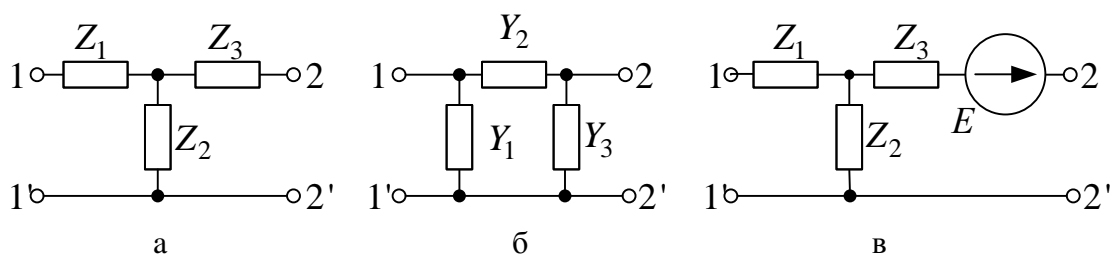


Рис. 1.15

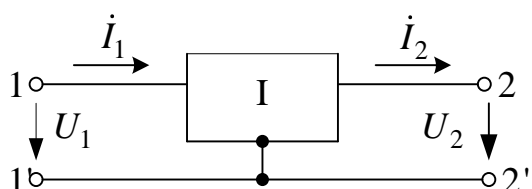


Рис. 1.16

Всегда регулярными являются следующие способы соединения четырехполюсников:

– Последовательное соединение «трехполюсных» четырехполюсников по схеме рис. 1.17.

– Параллельное соединение:

а) «трехполюсных» четырехполюсников по схеме рис. 1.18;

б) уравновешенных четырехполюсников;

в) подобных четырехполюсников, схемы которых одинаковы, а величины соответствующих элементов пропорциональны.

– Каскадное соединение любых четырехполюсников.

В случае если соединения простых четырехполюсников отличны от указанных выше способов, нужно проверять выполнение условия *регулярности*, т. е. условие равенства токов, входящих и выходящих в каждой паре составных четырехполюсников.

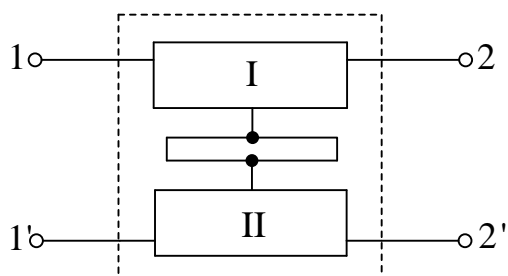


Рис. 1.17

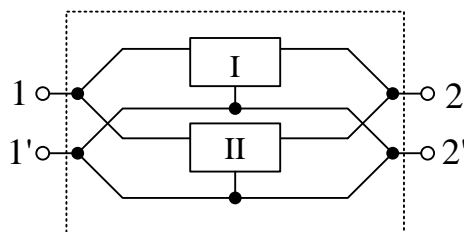


Рис. 1.18

При последовательном соединении четырехполюсников проверка условия регулярности производится по схемам рис. 1.19. Первый опыт соответствует прямой передаче, когда левые зажимы четырехполюсников соединены после-

довательно, а правые разомкнуты (рис. 1.19, а). Второй опыт соответствует обратной передаче, когда правые зажимы соединены последовательно, а левые разомкнуты (рис. 1.19, б).

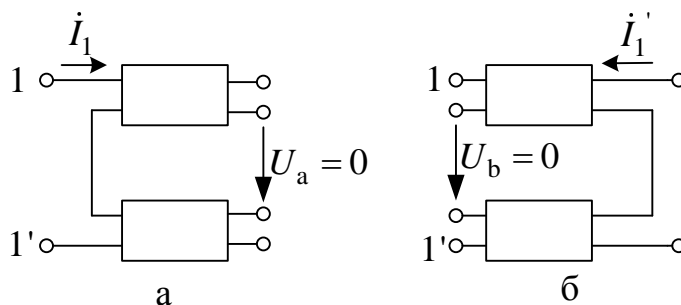


Рис. 1.19

Напряжение  $U$  между нижним разомкнутым зажимом первого четырехполюсника и верхним разомкнутым зажимом второго четырехполюсника должно быть равно нулю. В противном случае соединение является нерегулярным.

При параллельном соединении четырехполюсников проверка производится по схемам рис. 1.20.

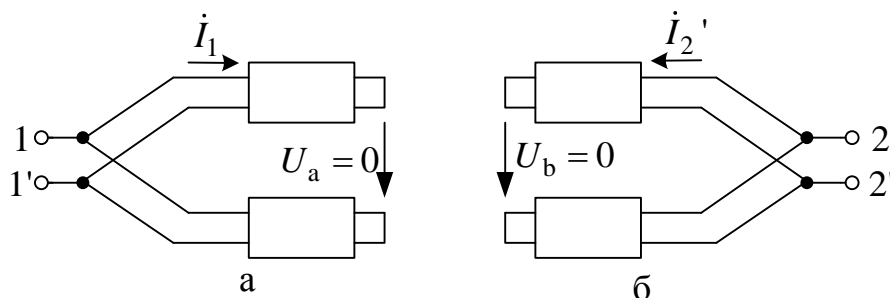


Рис. 1.20

Сначала при прямой передаче соединяются параллельно левые зажимы и замыкаются накоротко правые (рис. 1.20, а), затем при обратной передаче соединяются параллельно правые зажимы и замыкаются накоротко левые (рис. 1.20, б). В обоих случаях напряжение  $U$  между закороченными зажимами двух четырехполюсников должно быть равно нулю.

При последовательно-параллельном соединении четырехполюсников проверка производится по схемам рис. 1.21. При прямой передаче соединяются последовательно левые зажимы четырехполюсников и замыкаются накоротко правые (рис. 1.21, а). При обратной передаче соединяются параллельно правые и размыкаются левые зажимы (рис. 1.21, б). В обоих случаях напряжение  $U$  равно нулю, если условие регулярности соблюдено.

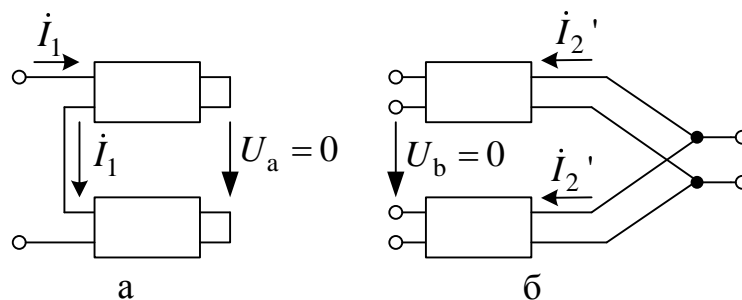


Рис. 1.21

При параллельно-последовательном соединении проверка регулярности осуществляется аналогично по схемам рис. 1.22.

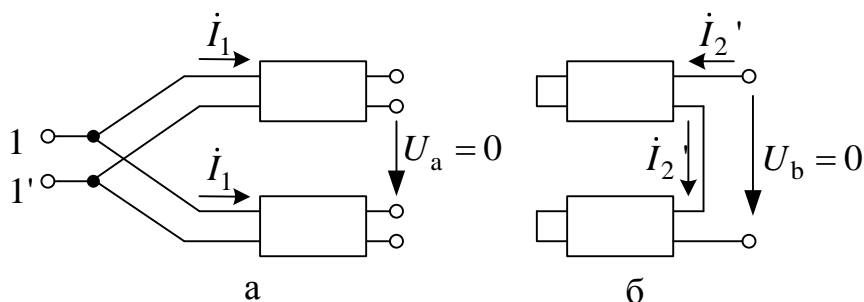


Рис. 1.22

## 2. Электрические фильтры

### 2.1 Основные теоретические положения

*Электрическим фильтром* называют устройство, включенное между источником питания и приемником, служащее для преимущественного ослабления колебаний одной части спектра частот по отношению к другой, части спектра.

*Принцип работы* электрических фильтров основывается на известных положениях:

1) индуктивное сопротивление прямо пропорционально ( $X_L = 2\pi fL$ ), а емкостное – обратно пропорционально ( $X_C = 2\pi fC$ ) частоте;

2) ток в индуктивности на угол  $\frac{\pi}{2}$  отстает от напряжения, а в емкости – настолько же опережает.

Различные комбинации катушек индуктивности и конденсаторов дают фильтры, различные по своему действию: низкочастотные, высокочастотные, полосовые, заграждающие.

Будем считать *идеальным* фильтр, состоящий из чисто реактивных элементов.

Областью (полосой) пропускания идеального фильтра называют диапазон частот, в котором коэффициент затухания фильтра  $a$  равен нулю, а областью (полосой) затухания – диапазон частот, в котором коэффициент  $a$  отличен от нуля. Частоту, являющуюся граничной между полосой прозрачности и полосой затухания, называют частотой среза.

## 2.2 Фильтры типа $k$ ; их схемы замещения, номинальное характеристическое сопротивление фильтра

Следует запомнить, что цепочечные фильтры образуются из  $\Gamma$ -образных полувеньев, Т- и П-образных звеньев, которые в случае многозвенного фильтра соединяются каскадно по принципу согласования характеристических сопротивлений.

Фильтрами нижних частот (ФНЧ) называют фильтры, пропускающие в нагрузку лишь сигналы низких частот, от  $\omega_1 = 0$  до  $\omega_2$ . Полоса затухания ФНЧ находится в интервале от  $\omega_2$  до  $\infty$ .

Т- и П-образные схемы ФНЧ приведены на рис. 2.1 а, б соответственно.

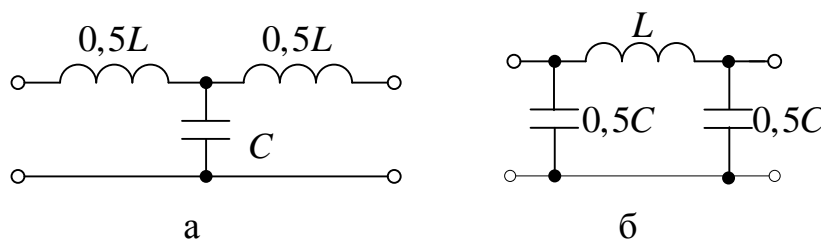


Рис. 2.1

Под фильтрами верхних частот (ФВЧ) понимают фильтры, пропускающие в нагрузку сигналы высокой частоты, начиная с  $\omega_1$  до  $\infty$ . Полоса затухания находится в интервале от 0 до  $\omega_1$ .

Т- и П-образные схемы ФВЧ приведены на рис. 2.2, а, б соответственно.

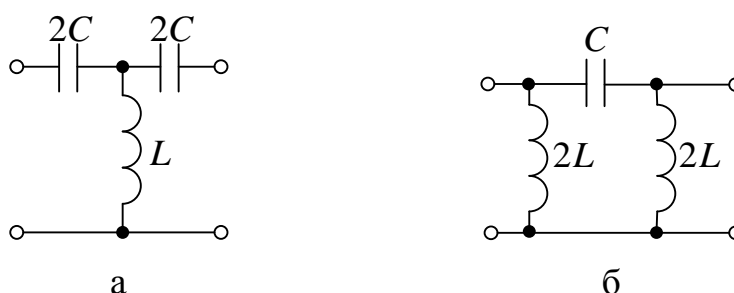


Рис. 2.2

Фильтры, изображенные на рис. 2.1, 2.2, относятся к фильтрам типа  $k$ , где  $k^2 = Z_1 \cdot Z_2 = R_H^2$ . Параметр  $R_H = \sqrt{Z_1 \cdot Z_2}$  называют номинальным характеристическим сопротивлением. Для данного фильтра  $R_H$  является величиной постоянной.

## 2.3 Расчет простейших фильтров по характеристическим параметрам

Поскольку фильтр – частный случай четырехполюсника, то его свойства определяются характеристическим сопротивлением  $Z_c$  и характеристической постоянной передачи  $g = a + jb$  (см. формулы в разделе «Четырехполюсники»). Этих двух параметров достаточно для анализа работы фильтра в полосе пропускания и в полосе задерживания.

Характеристические параметры звена фильтра связаны с А-параметрами матрицы симметричного четырехполюсника формулами [1]:

$$\operatorname{ch} g_c = A_{11}; \quad (2.1)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}; \quad (2.2)$$

$$\operatorname{sh} g_c = \frac{1}{Z_c} \cdot A_{12} = Z_c \cdot A_{21}; \quad (2.3)$$

$$\operatorname{th} g_c = \frac{1}{Z_c} \cdot \frac{A_{12}}{A_{21}} = \sqrt{\frac{Z_{кз}}{Z_{xx}}}. \quad (2.4)$$

Эти формулы являются основными для расчета простейших звеньев симметричных фильтров.

В пределах полосы пропускания характеристическое затухание равно нулю ( $a = 0$ ;  $\operatorname{ch} a = 1$ ;  $\operatorname{sh} a = 0$ ).

Так как  $A_{11} = \operatorname{ch}(a + jb) = \operatorname{ch} a \cdot \cos b + j \operatorname{sh} a \cdot \sin b$ , то в полосе пропускания ( $a = 0$ ) мнимая часть данного выражения равняется нулю, это позволяет составить уравнения отдельно для полосы прозрачности и полосы затухания ( $a \neq 0$ ).

Границы полосы прозрачности определяются из формулы 2.5:

$$-1 \leq A_{11} \leq 1,$$

Таблица 2

В полосе прозрачности	Вне полосы пропускания
$a = 0;$ $\cos b = A_{11}; \quad (2.5)$	$\pm \operatorname{ch} a = A_{11};$ $b = \pm \pi.$

откуда следует условие:

$$-1 \leq \frac{Z_1}{4 \cdot Z_2} \leq 0,$$

где  $Z_1$  и  $Z_2$  – являются реактивными сопротивлениями фильтра и имеют разные знаки:  $Z_1 = \pm jx_1$ ;  $Z_2 = \pm jx_2$ , следовательно:

$$-1 \leq \frac{x_1}{4 \cdot x_2} \leq 0. \quad (2.6)$$

Из формулы 2.6 видно, что величины сопротивлений в полосе прозрачности должны удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \text{ или } x_2 = \infty; \\ x_1 = 4 \cdot x_2. \end{cases} \quad (2.7)$$

Из формул 2.7 определяются границы полосы пропускания фильтра.

По вышеприведенным формулам рассчитывают характеристическое затухание и характеристическую фазу простейшего фильтра (или звена фильтра) без потерь.

## 2.4 Расчет элементов фильтров по заданным полосе прозрачности и сопротивлению нагрузки

Основные расчетные формулы представлены в табл.3. Формулы получены из выражений 2.6, 2.7.

Параметр  $\eta$  называется *нормированной частотой*;

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{f}{f_c},$$

где  $\omega_c$  (или  $f_c$ ) – частота среза (граничная частота между полосой пропускания и полосой задерживания фильтра).

$$\text{Для ФНЧ: } \omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}, \text{ для ФВЧ: } \omega_c = \frac{1}{2\sqrt{LC}}.$$

Формулы для коэффициента затухания  $a$  приведены для частот, лежащих вне полосы пропускания, так как в пределах полосы пропускания затухание равно нулю. Формулы для фазового сдвига даны только для частот, заключенных в пределах полосы прозрачности, так как вне полосы прозрачности фазовый сдвиг постоянен.

Таблица 3

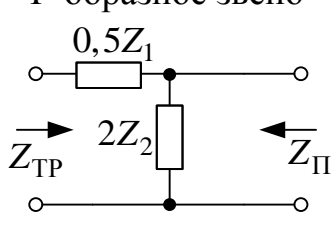
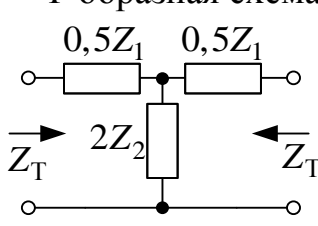
Звенья симметричных фильтров

Фильтр нижних частот (ФНЧ)		
	«Т»	«П»
Схема		
Формулы для расчета параметров	$L = \frac{2R_H}{\omega_c}; C = \frac{2}{R_H\omega_c}; \omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}; R_H = \sqrt{\frac{L}{C}}.$	
Характеристики для Т- и П-образной схем	<p>Затухания (<math>\text{ch } a_c = 2\eta^2 - 1</math>):</p>	<p>Фазовая (<math>\cos b_c = 1 - 2\eta^2</math>):</p>
Фильтр верхних частот (ФВЧ)		
	«Т»	«П»
Схема		
Формулы для расчета параметров	$L = \frac{R_H}{2\omega_c}; C = \frac{1}{2R_H\omega_c}; \omega_c = \frac{1}{2\sqrt{LC}}; R_H = \sqrt{\frac{L}{C}}.$	
Характеристики для Т- и П-образной схем	<p>Затухания (<math>\text{ch } a_c = \frac{2}{\eta^2} - 1</math>):</p>	<p>Фазовая (<math>\cos b_c = 1 - \frac{2}{\eta^2}</math>):</p>

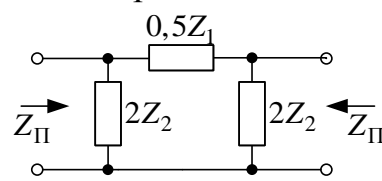
Характеристическое сопротивление  $Z_c$  определяется как нагрузочное сопротивление, при котором имеет место равенство входного и нагрузочного сопротивления. На одной из частот полосы прозрачности фильтра для симметричных звеньев характеристические сопротивления со стороны входа и выхода равны.

## 2.5 Расчет характеристических параметров фильтра по известным параметрам звеньев фильтра

Таблица 4

Схема	Характеристическая постоянная передачи	Характеристическое сопротивление
<p>Г-образное звено</p>  <p>Рис.2.3</p>	$\frac{g}{2}$	$Z_{c_T} = \sqrt{Z_1 \cdot Z_2 \cdot \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)};$ $Z_{c_{\Pi}} = \sqrt{\frac{Z_1 \cdot Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4 \cdot Z_2}}}$
<p>Т-образная схема</p>  <p>Рис.2.4</p>	$g = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = a + jb;$ $a = \ln \frac{U_1}{U_2};$ $b = \psi_{U_1} - \psi_{U_2};$	$Z_{c_T} = \sqrt{Z_1 \cdot Z_2 \cdot \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)} =$ $= R_H \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} =$ $= R_H \cdot \sqrt{1 - \eta^2};$

Продолжение таблицы 4

<p>П-образная схема</p>  <p>Рис.2.5</p>		$Z_{c_{\Pi}} = \sqrt{\frac{Z_1 \cdot Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4 \cdot Z_2}}} =$ $= \frac{R_H}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} = \frac{R_H}{\sqrt{1 - \eta^2}}.$
--	--	---

*Примечание:* Г-образное звено является несимметричным четырехполюсником и поэтому имеет два различных значения характеристического сопротивления

$Z_{\Pi}$  и  $Z_T$ , собственная постоянная передачи равна  $\frac{g}{2}$ .

Формулы таблицы 4 являются основными для цепочечных фильтров, т.к. на их основе делаются все дальнейшие выводы. Следует обратить внимание, что эти формулы справедливы только при значениях элементов, указанных на рис. 2.3 – 2.5.

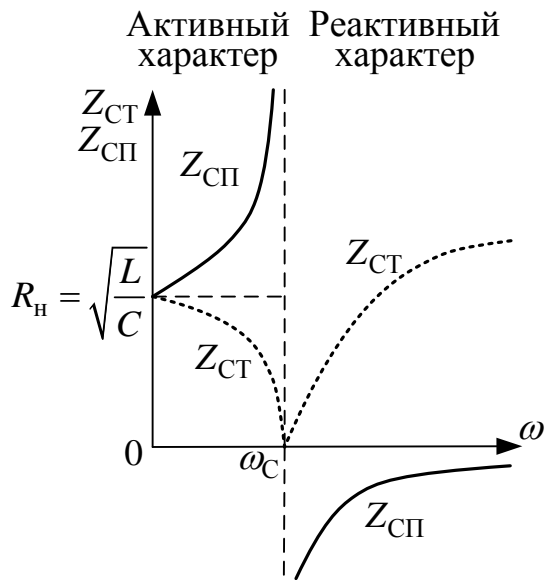


Рис. 2.6. Зависимость характеристического сопротивления ФНЧ от частоты

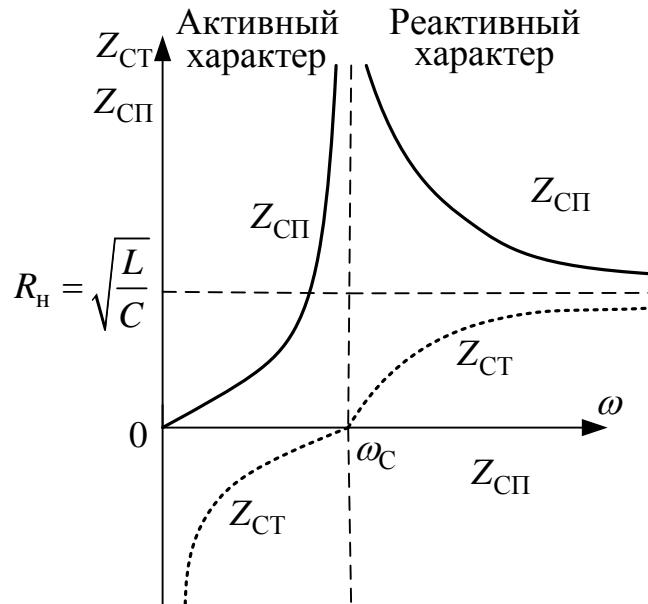


Рис. 2.7. Зависимость характеристического сопротивления ФВЧ от частоты

На рис. 2.6, 2.7 изображены частотные зависимости характеристических сопротивлений Т- и П-образных фильтров низких (рис. 2.6) и высоких (рис. 2.7) частот.

В области пропускания характеристическое сопротивление – активное. Для ФНЧ при низких частотах оно мало изменяется с ростом частот и близко к назначению  $k = \sqrt{\frac{L}{C}}$ . По мере увеличения частоты и приближении ее к  $\omega_c$  характеристическое сопротивление Т-образного фильтра стремиться к нулю, П-

образного фильтра к бесконечности. В области полосы затухания характеристическое сопротивление носит реактивный характер, причем для Т-образного фильтра она становится индуктивным, а для П-образного фильтра – емкостным.

Для ФВЧ характеристическое сопротивление остается приблизительно постоянным и равным  $k = \sqrt{\frac{L}{C}}$  при достаточно больших частотах. При низких частотах оно – реактивное, причем для П-образных фильтров носит индуктивный характер, для Т-образных фильтров – емкостной.

### 3. Переходные процессы в линейных электрических цепях. Возникновение переходных процессов и их значение

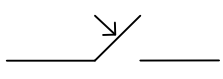
*Переходными процессами* называют явления, имеющие место в электрических цепях при изменении их режима работы: включении и выключении пассивных и активных элементов, внезапном изменении параметров, коротком замыкании отдельных участков и т.д. Эти процессы обусловлены изменением энергетического состояния цепи при переходе от одного установившегося режима к другому.

Энергия, запасенная в магнитном поле катушки  $W_L = \frac{Li^2}{2}$ , и энергия электрического поля емкости  $W_C = \frac{CU^2}{2}$  не могут изменяться скачком. Следовательно, для завершения переходного процесса требуется некоторый промежуток времени, в течении которого токи и напряжения могут достигать больших величин.

В одних устройствах (системах автоматики, в импульсной технике) переходные процессы являются нормальным режимом работы; в других устройствах (в длинных ЛЭП) – переходные процессы являются аварийным режимом работы. Без учета переходных процессов нельзя правильно спроектировать и эксплуатировать радиотехническую и электротехническую аппаратуру.

#### 3.1 Коммутация и ее законы

*Коммутацией* называют включение или отключение цепи от источника энергии, а так же изменение ее параметров. На схеме коммутация обозначается в виде ключа со стрелкой:

а)  – Замыкание ключа.

б)  – Размыкание ключа.

Момент коммутации обычно принимают за начало отсчета  $t = 0, t(0)$ .

Момент времени непосредственно перед коммутацией обозначается  $t(0_-)$ , непосредственно после коммутации  $t(0_+)$ .

Существуют два закона коммутации:

***Первый закон коммутации:***

Ток и магнитный поток в индуктивности непосредственно после коммутации равны току и магнитному потоку в той же индуктивности непосредственно перед коммутацией. Другими словами: **ток и магнитный поток через индуктивность в момент коммутации не могут измениться скачкообразно:**

$$i_L(0_+) = i_L(0_-).$$

***Второй закон коммутации:***

Напряжение и заряд на емкости непосредственно после коммутации равны напряжению и заряду на этой же емкости непосредственно перед коммутацией. Другими словами: **напряжения и заряд на емкости в момент коммутации не могут изменяться скачкообразно.**

$$U_C(0_+) = U_C(0_-)$$

Следует отметить, что скачкообразно могут изменяться:

- 1) Токи в сопротивлениях и емкостях;
- 2) Напряжения на сопротивлениях и индуктивностях.

Отсюда следует, что в электрических цепях, состоящих только из активных сопротивлений, переход из одного установившегося состояния к другому совершается мгновенно.

Законы коммутации используются для нахождения начальных условий, которые необходимы для определения постоянных интегрирования при расчете переходных процессов в электрических цепях.

### 3.2 Начальные условия

Значения токов и напряжений на элементах электрической цепи в момент  $t(0_+)$  (непосредственно после коммутации) называется *начальными условиями*.

Различают *независимые* и *зависимые начальные условия*. К независимым относится: ток, протекающий через индуктивность, и напряжение на емкости:  $i_L(0_+)$  и  $u_C(0_+)$  Эти условия определяются законами коммутации.

Значения всех остальных токов и напряжений и их производных относятся к зависимым начальным условиям.

В зависимости от энергетического состояния цепи различают два вида задач:

1) Электрическая цепь непосредственно перед коммутацией не обладала энергией, т. е.  $i_L(0_-) = 0$  и  $U_C(0_-) = 0$ . В этом случае расчет цепи является *задачей с нулевыми начальными условиями*:

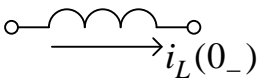


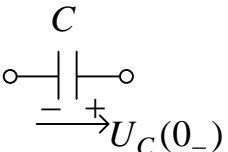
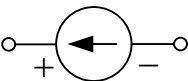

$$i_L(0_+) = 0; U_C(0_+) = 0.$$

2) Электрическая цепь перед коммутацией обладала запасом энергии. Определение токов и напряжений в переходном режиме представляет *задачу с ненулевыми начальными условиями*:

$$i_L(0_+) \neq 0; U_C(0_+) \neq 0.$$

Таблица 5 показывает, как надо представлять индуктивность и емкость в эквивалентной схеме для момента коммутации ( $t = 0+$ ) в зависимости от вида начальных условий:

Таблица 5

Элемент	Ненулевые н. у.	Нулевые н. у.
	$i_L(0_+)$ 	$i_L(0_+) = 0$ 
	$U_C(0_+)$ 	$U_C(0_+) = 0$ 

При нулевых начальных условиях  $i_L(0_+) = 0$  и  $U_C(0_+) = 0$  индуктивность в момент коммутации равносильна разрыву цепи, а емкость – короткому замыканию.

При ненулевых начальных условиях  $i_L(0_+) \neq 0$  и  $U_C(0_+) \neq 0$  индуктивность в момент времени  $t = 0$  равносильна источнику тока  $i_L(0_+)$ , а емкость – источнику напряжения с ЭДС равной  $U_C(0_+)$ .

### 3.3 Классический метод расчета переходных процессов

*Рассчитать переходный процесс* – это значит найти закон изменения токов и напряжений на отдельных элементах или ветвях цепи при изменении времени от момента коммутации ( $t = 0$ ) до установления нового стационарного режима ( $t = \infty$ ).

Расчет переходных процессов классическим методом сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений и производится в следующем порядке:

1. Задаются положительным направлением тока в каждой ветви схемы, образовавшейся после коммутации, и составляют уравнения по законам Кирхгофа для мгновенных значений.

2. Полученную систему уравнений сводят к одному уравнению с одним неизвестным током или напряжением на каком-либо элементе цепи. (решение будет проще, если этим неизвестным окажется ток через индуктивность или напряжение на емкости). В общем случае получается неоднородное линейное дифференциальное уравнение  $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами.

3. Дифференциальное уравнение решается известными из математики способами. Пользуясь начальными условиями определяют постоянные интегрирования и в итоге получают токи и напряжения переходного процесса функции времени.

Система интегро-дифференциальных уравнений цепи всегда составляется для цепи в состоянии *после коммутации*, то есть после замыкания или размыкания ключа.

При составлении этой системы уравнений, связывающих мгновенные значения входных и выходных электрических величин между собой, используются следующие соотношения:

$$U_R(t) = i(t) \cdot r; \quad i(t) = \frac{U_R(t)}{R};$$

$$U_L = L \frac{di(t)}{dt}; \quad i(t) = \frac{1}{L} \int U_L(t) dt;$$

$$i_C(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt} \quad U_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt .$$

Где  $U_R(t)$ ,  $U_L(t)$ ,  $U_C(t)$  – напряжения на активном сопротивлении, индуктивности и емкости соответственно.

### **3.4 Решение дифференциального уравнения. Свободная и принужденная составляющие**

Решение полученного дифференциального уравнения представляют в виде суммы двух решений: принужденного и свободного тока или напряжения ( $i = i_{пр} + i_{св}$  или  $U = U_{пр} + U_{св}$ ).

С математической точки зрения  $i_{пр}$  – частное решение неоднородного уравнения; с физической точки зрения  $i_{пр}$  – ток рассматриваемой ветви в установившемся режиме, если в цепи действуют источники постоянного тока и напряжения или источники синусоидального тока и напряжения. Принужден-

ный ток определяется законом изменения действующих в цепи источников и параметрами цепи. Он может быть найден любым методом расчета цепи в установившемся режиме (закон Ома, закон Кирхгофа, метод контурных токов и т.д.).

Свободный ток ( $i_{св}$ ) с точки зрения математики – решение соответствующего однородного дифференциального уравнения. С физической точки зрения  $i_{св}$  – ток в цепи, предоставленной самой себе при определенных начальных условиях. Свободный ток не зависит от закона изменения действующих в цепи источников и определяется начальными условиями и напряжениями цепи.

Общий вид свободного тока зависит от порядка дифференциального уравнения и от характера корней (вещественные или комплексные) характеристические уравнения.

Для схемы первого порядка свободный ток имеет вид:

$$i_{св} = Ae^{pt}.$$

Для схемы второго порядка:

а) в случае вещественных и разных корней  $i_{св} = A_1e^{p_1t} + A_2 \cdot e^{p_2t}$  ;

б) в случае вещественных и равных корней  $i_{св} = B_1 + B_2 \cdot te^{pt}$  ;

в) в случае комплексно-сопряженных корней  $i_{св} = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi_{св})$  ,

где  $A_1, A_2, B_1, B_2, A, \psi_{св}$  – постоянные интегрирования.

### ***Алгоритм решения переходных процессов классическим методом:***

1. Определение независимых начальных условий  $i_L(0_+)$  и  $U_C(0_+)$ . Независимые начальные условия рассчитывают в цепи в докоммутационном режиме.
2. Определение зависимых начальных условий. Зависимые начальные условия определяются следующим образом. Составляются уравнения по законам Кирхгофа для момента времени  $t = 0_+$  в цепи, являющейся эквивалентом исходной цепи для момента времени  $t = 0$ . В эти уравнения подставляют независимые начальные условия  $i_L(0_+)$  и  $U_C(0_+)$ . Решив полученную систему уравнений, можно определить зависимые начальные условия.
3. Записывают характеристическое уравнение цепи. Данное уравнение можно получить, минуя составления соответствующих интегро-дифференциальных уравнений. Для этого достаточно составить уравнение входного сопротивления цепи относительно какой-либо ее ветви. Назовем его входным характеристическим сопротивлением. При записи данного сопротивления вместо реактивных сопротивлений  $X_L = \omega L$  и  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  используем их

операторную форму  $X_L(p) = pL$  и  $X_C(p) = \frac{1}{pC}$ . Затем входное характеристическое сопротивление приравниваем к нулю:  $Z(p) = 0$ . Приравнивание характеристического входного сопротивления к нулю приводит сразу к характеристическому уравнению цепи. При составлении входного характеристического сопротивления цепи источники и тока, и напряжения не учитываются: ветви с источниками тока размыкают, участки с источниками ЭДС закорачивают.

Физический смысл приравнивания к нулю характеристического сопротивления следующей: мы ищем параметры собственной функции тока цепи, который может протекать при отсутствии источников напряжения или тока, т.е. ищем параметры собственного тока цепи, протекание которого в данной цепи не встречает сопротивления.

4. Определяем принужденные составляющие токов и напряжений. Для этого рассматриваем схему в установившемся режиме, полагая, что с момента коммутации прошло бесконечно большое время  $t = \infty$ .

5. Если на входе цепи действует источник постоянного тока или напряжения, то напомним, что сопротивление индуктивности  $X_L = \omega L = 0$ , сопротивление емкости  $X_C = \frac{1}{\omega C} = \infty$ .

Если на входе действует источник синусоидального тока или напряжения, то расчет принужденных составляющих производим методом комплексных амплитуд.

6. Записываем исходную переходную величину в виде суммы двух составляющих:  $i(t) = i_{пр} + i_{св}$ ,  $U(t) = U_{пр} + U_{св}$ .

7. Подставляя начальные условия, определяем постоянные интегрирования.

8. После того, как найдены постоянные интегрирования, записываем окончательное решение и строим графики для иллюстрации полученного результата.

#### 4 Операторный метод расчета переходных процессов

При расчете переходных процессов операторным методом ток и напряжение на любом участке цепи, являющимися функциями времени  $t$  (называемые оригиналами), замещают соответствующими функциями комплексного переменного  $P$  (называемые изображениями).

Эта замена осуществляется на основании прямого преобразования Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt;$$

Условно, соответствие изображения  $F(p)$  и временной функции  $f(t)$  записывают:

$$f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p);$$

Говорят  $f(t)$  – оригинал изображения  $F(p)$ . Временные функции (оригиналы) изображают малыми буквами:

$$\left. \begin{array}{l} i(t) \\ u(t) \\ e(t) \end{array} \right\} \text{– оригиналы;}$$

Изображения обозначают большими буквами:

$$\left. \begin{array}{l} I(p) \\ U(p) \\ E(p) \end{array} \right\} \text{– изображения.}$$

Нахождение оригиналов по заданным изображениям называют *обратным преобразованием Лапласа*.

#### 4.1 Закон Ома и Кирхгофа в операторной форме

Одним из свойств преобразования Лапласа является то, что при переходе от оригиналов к изображениям не нарушаются алгебраические равенства, установленные для оригиналов.

В частности для теории цепей существенно, то при переходе к изображениям сохраняются законы Ома и Кирхгофа электрических цепей.

В активном сопротивлении  $R$  по закону Ома:

$$U(t) = i(t) \cdot R;$$

После перехода к изображениям получаем закон Ома в операторной форме:

$$U(p) = I(p) \cdot R; \tag{4.1}$$

Для изображений токов, напряжений и ЭДС цепи выполняются законы Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа в операторной форме – алгебраическая сумма изображений токов, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю:

$$\sum I(p) = 0; \tag{4.2}$$

Второй закон Кирхгофа в операторной форме – в замкнутом контуре алгебраическая сумма изображений напряжений равна алгебраической сумме изображений ЭДС с учетом независимых начальных условий:

$$\sum U(p) = \sum E(p) \pm Li_L(0) \pm \frac{U_C(0)}{p}. \quad (4.3)$$

## 4.2 Операторные схемы замещения.

### 4.2.1 Операторная схема замещения емкости

Если известно изображение  $F(p)$  функции оригинала  $f(t)$ , то изображение интеграла оригинала во времени определяется следующей формулой, называемой формулой или теоремой интегрирования:

$$\int_0^t f(t) dt = \frac{F(p)}{p}; \quad (4.4)$$

1. Если емкость к начальному моменту времени  $t = 0$  не заряжена, то ее напряжение:

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt;$$

Согласно теоремы интегрирования изображения напряжения:

$$U(p) = \frac{1}{pC} \cdot I(p); \quad (4.5)$$

Вместо интегрального соотношения для оригиналов мы пришли к алгебраическому выражению (4.5) для изображений. Изображения напряжения и тока связаны законом Ома, если в качестве сопротивления рассматривать величину:

$$Z_C(p) = \frac{1}{pC},$$

где  $\frac{1}{pC}$  – операторное сопротивление емкости.

Операторная схема замещения показана на рисунке (4.1, б):

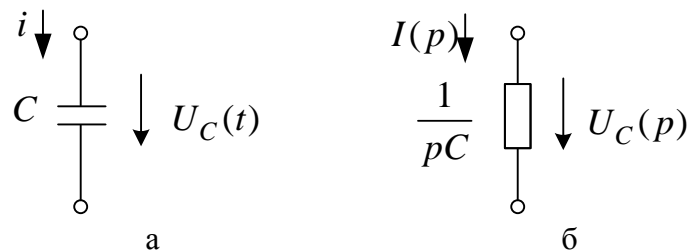


Рис. 4.1

Если емкость к моменту времени  $t = 0$  заряжена до напряжения  $U_c(0_-)$ , то напряжение на емкости равно:

$$U_c(t) = U_c(0_-) + \frac{1}{c} \int_0^t i dt;$$

Используя теорему интегрирования и изображения постоянной, перейдем от последнего равенства к изображению  $U_c(p)$ :

$$U_c(p) = \frac{U_c(0_-)}{p} + \frac{1}{pC} \cdot I(p); \quad (4.6)$$

Изображение напряжения на конденсаторе (7) помимо омической составляющей, пропорциональной операторному сопротивлению емкости  $Z_c(p) = \frac{1}{pC}$  и ее изображению тока  $I(p)$ , содержит независящее от тока слагаемое  $\frac{U_c(0_-)}{p}$ , которое на схеме замещения может быть представлено как источник напряжения.

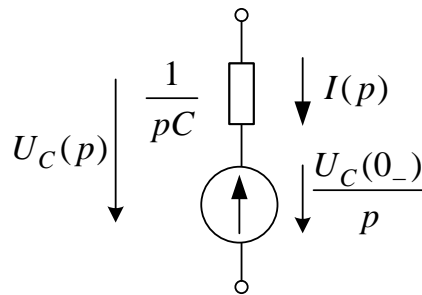


Рис. 4.2

#### 4.2.2 Схема замещения индуктивности

Если известно изображение  $F(p)$  временной функции  $f(t)$ , то изображение производной последней:

$$\frac{df}{dt} = pF(p) - f(0_-), \quad (4.7)$$

где  $f(0_-)$  – начальное значение временной функции.

Ток и напряжение на индуктивности связаны дифференциальным соотношением:

$$U_L(t) = L \frac{di}{dt};$$

Используя теорему дифференцирования, перейдем к изображению:

$$U_L(p) = pL \cdot I(p) - L \cdot i(0_-), \quad (4.8)$$

где  $i(0_-)$  – начальное значение тока индуктивности, соответствующая выражению (4.7). Операторная схема замещения показана на рис 4.3.

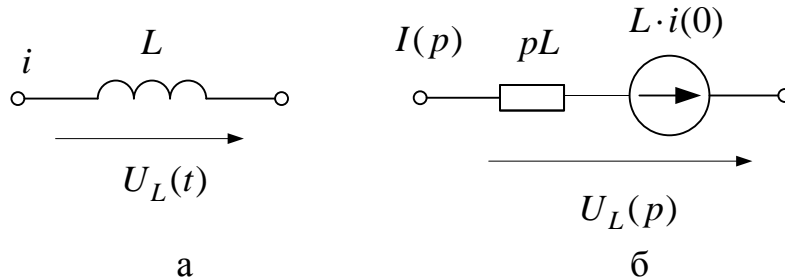


Рис 4.3

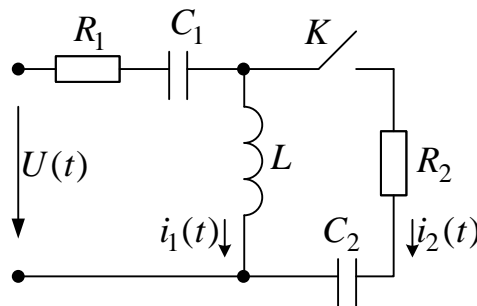
Здесь индуктивность представлена операторным сопротивлением  $pL$  и источником напряжения  $L \cdot i_l(0_-)$ , направленным по току, чтобы учесть минус в выражении (4.8).

Источники ЭДС  $\frac{U_c(0)}{p}$  и  $L \cdot i_l(0_-)$  называются внутренними ЭДС. Они обусловлены запасом энергии магнитного и электрического полей конденсатора и катушки соответственно.

В схеме с нулевыми начальными условиями эти ЭДС отсутствуют.

### ***Пример построения операторной схемы замещения***

Задана схема. Коммутация происходит в результате замыкания ключа  $K$ . Составить операторную схему замещения.



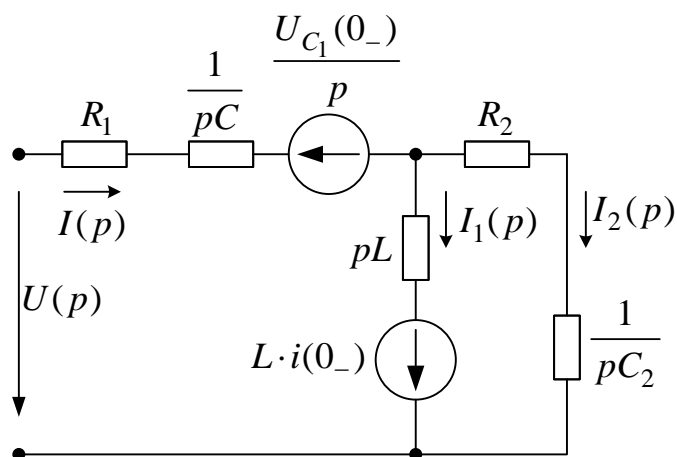


Рис. 4.4

До коммутации под действием входного переменного напряжения по ветви  $R_1 - C_1 - L$  протекал ток, отличный от нуля. На конденсаторе  $C_1$  действовало напряжение, также отличное от нуля, т. е.

$$U_{C_1}(0_-) = U_{C_1}(0_+) \neq 0; \quad i_1(0_-) = i_1(0_+) \neq 0.$$

Следовательно, в операторной схеме замещения будут присутствовать операторные ЭДС  $\frac{U_{C_1}(0)}{p}$  и  $L \cdot i_1(0)$ .

### 4.3 Алгоритм расчета переходных процессов операторным методом

1. Задаются положительными направлениями тока в цепи и составляют операторную схему замещения.
2. Рассчитывают операторную схему замещения одним из известных методов расчет цепей постоянного и переменного тока: с помощью законов Кирхгофа, методом контурных токов, методом узловых потенциалов, методом эквивалентного генератора и т.д. и находят изображения искомых токов или напряжений  $I_L(p)$ ,  $U_C(p)$  и т. д.
3. По найденным изображениям определяют оригиналы, т. е.  $i_L(t)$ ;  $U_c(t)$  и т. д., либо с помощью таблицы, связывающие оригиналы с их изображениями, либо используя теорему разложения.
4. Получив окончательные математические выражения искомых величин, строят графики для иллюстрации найденных результатов.

## 5. Расчет переходных процессов с помощью интеграла Дюамеля

Интеграл Дюамеля применяют для расчета переходного процесса (выходного сигнала) в линейной пассивной электрической цепи с нулевыми

начальными условиями при воздействии на нее напряжения  $U(t)$ , имеющего произвольную аналитическую или кусочно-аналитическую форму (рис. 5.1)

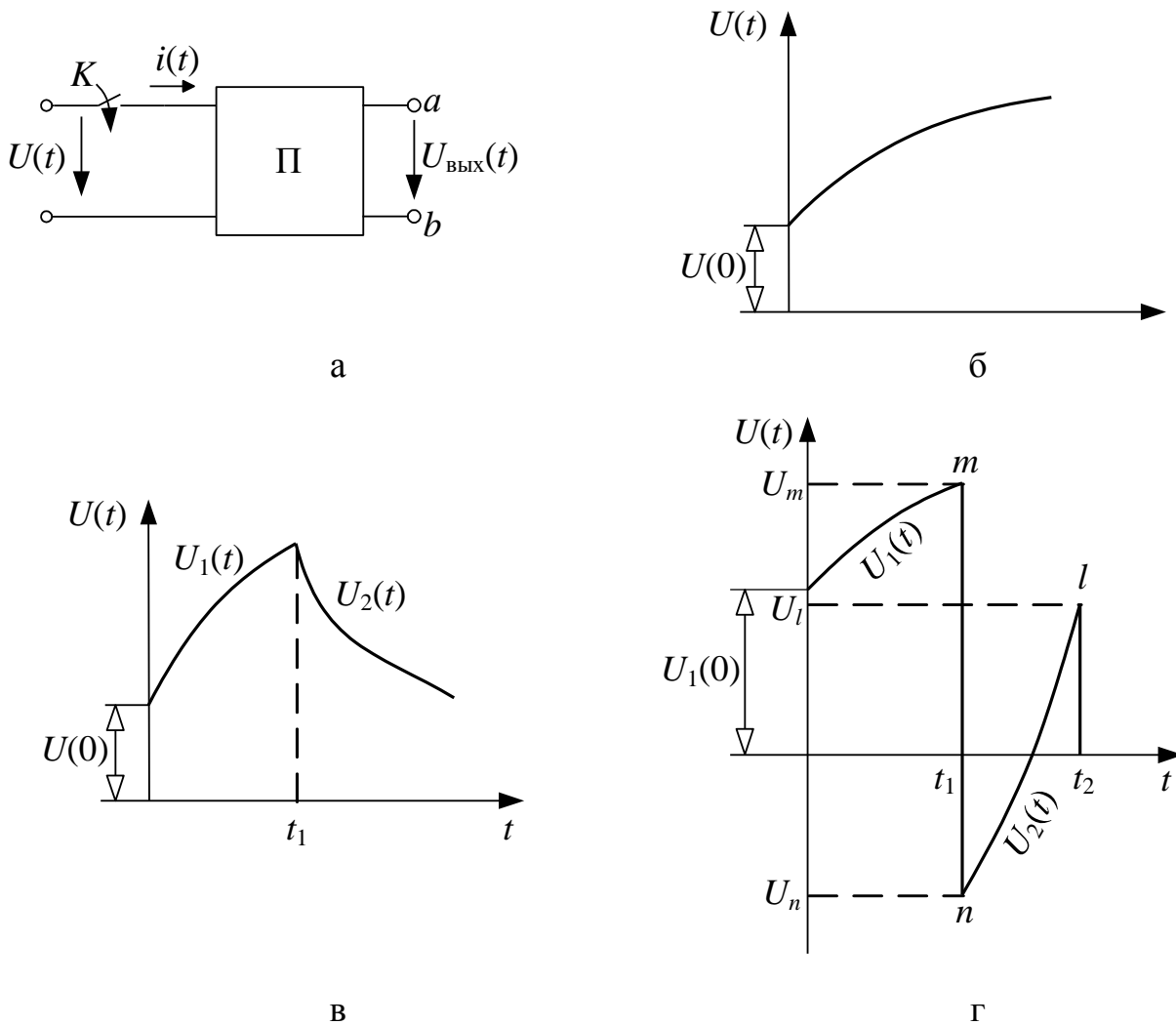


Рис. 5.1

Применение интеграла Дюамеля требует знания выражений для переходной характеристики цепи и входного воздействия (сигнала)  $f_{\text{вх}}(t)$ .

### 5.1 Расчет переходных характеристик цепи

Переходной характеристикой цепи называют реакцию цепи с нулевыми начальными условиями на единичное воздействие, т.е. на входной сигнал единичной величины.

Т.к. воздействие и реакция могут быть током или напряжением, то возможны четыре их сочетания. Различают переходную проводимость  $g(t)$ , переходное сопротивление  $z(t)$  и переходные характеристики передачи по току —  $h_i(t)$  и по напряжению  $h_u(t)$ .

Переходная характеристика цепи совпадает с переходным током или напряжением при подключении цепи к источнику постоянного напряжения (тока) единичной величины.

Пример 1: В цепи заданы  $R$  и  $L$ . Определить переходную проводимость  $g(t)$  и переходные функции по напряжению на участках с резистором и индуктивностью:  $h_{U_R}(t)$ ,  $h_{U_L}(t)$

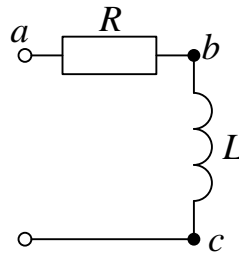


Рис. 5.2

Известно, что при подключении такой цепи на постоянное напряжение  $U$  ток переходного режима определяется соотношением:

$$i(t) = \frac{U}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Напряжение на активном сопротивлении и на индуктивности определяют выражениями:

$$U_R(t) = U \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right);$$

$$U_L(t) = U e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Тогда

$$g(t) = i(t)|_{U=1} = \frac{1}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right);$$

$$h_{U_R}(t) = U_R(t)|_{U=1} = \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right);$$

$$h_{U_L}(t) = U_L(t)|_{U=1} = e^{-\frac{R}{L}t}.$$

## 1.2 Интеграл Дюамеля

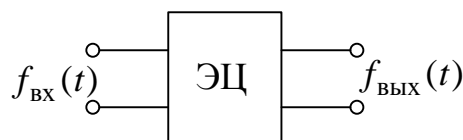


Рис. 5.2.1

Таблица 6

$f_{\text{BX}}(t)$	$f_{\text{ВЫХ}}(t)$	$h(t)$	$f_{\text{ВЫХ}}(t) = f_{\text{BX}}(0)h(t) + \int_0^t f'_{\text{BX}}(\tau)h(t-\tau)d\tau$
$u$	$u$	$h_u(t)$ – переходная характеристика по напряжению	$u_{\text{ВЫХ}}(t) = u_{\text{BX}}(0)h_u(t) + \int_0^t u'_{\text{BX}}(\tau)h_u(t-\tau)d\tau$
$i$	$i$	$h_i(t)$ – переходная характеристика по току	$i_{\text{ВЫХ}}(t) = i_{\text{BX}}(0)h_i(t) + \int_0^t i'_{\text{BX}}(\tau)h_i(t-\tau)d\tau$
$u$	$i$	$g(t)$ – переходная проводимость	$i_{\text{ВЫХ}}(t) = u_{\text{BX}}(0)g(t) + \int_0^t u'_{\text{BX}}(\tau)g(t-\tau)d\tau$
$i$	$u$	$z(t)$ – переходное сопротивление	$u_{\text{ВЫХ}}(t) = i_{\text{BX}}(0)z(t) + \int_0^t i'_{\text{BX}}(\tau)z(t-\tau)d\tau$

Если напряжение, воздействующее на линейную пассивную цепь, является непрерывно изменяющейся функцией времени (рис. 5.1, б), то ток в любой ветви определяется формулой (1), а напряжение на отдельном участке формулой (2):

$$i(t) = U(0)y(t) + \int_0^t U'(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (1)$$

$$U_{ab}(t) = U(0) \cdot h_u(t) + \int_0^t U'(\tau)h'_u(t-\tau)d\tau \quad (2)$$

где  $U(0)$  – входное напряжение в момент включения;

$U'(\tau)$  – производная по времени от входного напряжения, в которой  $t$  заменено на  $\tau$ ;

$y(t), h_U(t)$  – переходные проводимость и функция по напряжению соответственно;

$y(t-\tau), h_U(t-\tau)$  – переходные проводимость и функция по напряжению, в которых  $t$  заменено на  $t-\tau$ .

В зависимости от вида входного и выходного сигналов (см. табл. 6) выбирается соответствующая формула записи интеграла Дюамеля.

Если воздействующее на цепь напряжение изменяется хотя и непрерывно, но имеет разные аналитические выражения на отдельных интервалах времени (рис. 5.1, в), то ток и напряжение на каком-либо участке цепи в переходном режиме находятся для каждого интервала отдельно. Так, если воздействующее на цепь напряжение имеет два аналитических выражения  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$  (рис. 5.1, в), то ток и напряжение на каком-либо участке в переходном режиме будут определяться двумя аналитическими выражениями. Одно из них будет соответствовать первому интервалу времени от 0 до  $t_1$ , когда входное напряжение изменяется по закону  $U_1(t)$ , другое будет соответствовать интервалу времени от  $t_1$  до  $\infty$ , когда входное напряжение изменяется по закону  $U_2(t)$ . В первом интервале времени  $0 \leq t < t_1$ , ток в какой-либо ветви и напряжение на каком либо участке цепи  $ab$  определяются формулами (3) и (4) соответственно:

$$i_1(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^t U_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad (3)$$

$$U_{ab1}(t) = U_1(0) \cdot h_u(t) + \int_0^t U_1'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau. \quad (4)$$

Во втором интервале времени  $t_1 \leq t < \infty$  ток в этой же ветви и напряжение на этом же участке цепи  $ab$  определяются формулами (5), (6):

$$i_2(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^t U_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^t U_2'(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad (5)$$

$$U_{ab2}(t) = U_1(0) \cdot h_u(t) + \int_0^t U_1'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^t U_2'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau \quad (6)$$

Следует особое внимание обратить на случай, когда воздействующее на цепь напряжение не только определяется несколькими аналитическими выражениями, но и претерпевает скачки в какие-то моменты времени. Так, если на цепь воздействует напряжение, имеющее форму, показанную на рис 5.1, г, то время переходного процесса разбивается на три интервала:

- 1) Интервал  $0 \leq t < t_1$ , не включая скачка напряжения от  $U_m$  до  $-U_n$ . В этом интервале ток в ветви и напряжение на участке цепи  $ab$  определяется по формулам (3) и (4);
- 2) Второй интервал  $t_1 \leq t < t_2$ , не включая скачка от  $U_l$  до нуля. В этом интервале ток и напряжение в переходном режиме определяются формулами (7) и (8):

$$i_2(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^{t_1} U_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau - (U_m + U_n)g(t-t_1) + \int_{t_1}^t U_2'(\tau)g(t-\tau)d\tau; \quad (7)$$

$$U_{ab_2}(t) = U_1(0) \cdot h_u(t) + \int_0^{t_1} U_1'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau - (U_m + U_n)h_u(t-t_1) + \int_{t_1}^t U_2'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau. \quad (8)$$

Примечание: Определенные пределы у интегралов отражают окончание и начало их действия. Переходная характеристика в третьем члене выражения получила смещение на величину  $t_1$ , т.к. определяется реакция цепи для  $t > t_1$ . Во втором интеграле этого смещения вводить не нужно, т.к. оно учтено нижним пределом интегрирования.

Заметим также, что нельзя использовать предыдущий результат расчета, т.к. изменились пределы интегрирования.

- 3) Третий интервал  $t_2 \leq t < \infty$ . В этом интервале воздействующее напряжение равно нулю. Ток и напряжение  $U_{ab}$  переходного режима в этом интервале определяются выражениями (9) и (10):

$$i_2(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^{t_1} U_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau - (U_m + U_n)g(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} U_2'(\tau)g(t-\tau)d\tau - U_l g(t-t_2) + 0, \quad (9)$$

$$U_{ab_3}(t) = U_1(0) \cdot h_u(t) + \int_0^{t_1} U_1'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau - (U_m + U_n)h_u(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} U_2'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau - U_l h_u(t-t_2) + 0. \quad (10)$$

### 5.3 Последовательность расчета переходного процесса с помощью интеграла Дюамеля

1. Рассчитывают необходимые переходные характеристики цепи.

2. Записывают аналитически выражение входного сигнала  $f(t)$  на каждом интервале времени.
3. Определяют формулу интеграла Дюамеля для каждого интервала времени.
4. Записывают необходимые для решения интеграла функции, которые получают путем подстановки  $t = \tau$  или  $t - \tau$  в выражения  $g(t)$ ,  $h(t)$ ,  $h'(t)$ ,  $f(t)$ ,  $f'(t)$ .
5. Получают выражения для расчета выходного сигнала на каждом интервале, приводя их к более простому виду.
6. Делают оценку полученных результатов (верно – неверно).
7. Результаты расчета сводят в таблицу.
8. Строят в масштабе совмещенные графики входного и выходного сигналов (масштабы для сигнала и реакции выбирают так, чтобы графики получались соизмеримыми).

, 6