## 12.1 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ.

Необходимость определения постоянных интегрирования из начальных условий в ряде случаев сильно осложняет расчет переходных процессов классическим методом. По мере усложнения электрических схем и возрастания порядка дифференциальных уравнений трудности, связанные с нахождением постоянных интегрирования, увеличиваются.

Для инженерной практики более удобным является метод решения линейных дифференциальных уравнений, при котором заданные начальные условия включаются в исходные уравнения, и для нахождения искомых функций не требуется дополнительно определять постоянные интегрирования.

Операторный метод основан на использовании понятия «*изображение функции времени*».

Идея этого метода заключается в том, что из области функций действительного переменного решения переносятся в область функций комплексного переменного $p = c + j\omega$, где операции принимают более простой вид, а именно :

вместо исходных интегро-дифференциальных уравнений получаются алгебраические уравнения, которое затем решается и результат переводится в область функций действительного переменного.

Чтобы перевести функцию действительного переменного $t$ $f(t)$ в аналитическую функцию комплексного переменного используют *прямое преобразование Лапласа:*

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \tag{12.1}$$

где $f(t)$ – называется *оригиналом*, $F(p)$ – называется *изображением оригинала*.

Условно, соответствие изображения $F(p)$ и временной функции $f(t)$ записывают:

$$f(t) \risingdotseq F(p);$$

Говорят $f(t)$ – оригинал изображения $F(p)$. Временные функции (оригиналы) изображают малыми буквами:

$$\left.\begin{matrix} i(t) \\ u(t) \\ e(t) \end{matrix}\right\} - \text{оригиналы;}$$

Изображения обозначают большими буквами:

$$\left.\begin{matrix} I(p) \\ U(p) \\ E(p) \end{matrix}\right\} - \text{изображения.}$$

Нахождение оригиналов по заданным изображениям называют *обратным преобразованием Лапласа*.

Ниже приведена таблица, в которой указаны некоторые оригинальные функции времени и соответствующие им изображения.

Таблица 12.1.

| Функция времени f(t). | | Изображение функции. |
|---|---|---|
| 1 | 1 (единичная функция) | $\frac{1}{p}$ |
| 2 | $e^{\pm at}$ ( экспоненциальная функция) | $\frac{1}{p \pm a}$ |
| 3 | sin $\omega t$ (синусоидальная функция) | $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ |
| 4 | cos $\omega t$ (косинусоидальная функция) | $\frac{p}{p^2+\omega^2}$ |
| 5 | t | $\frac{1}{p^2}$ |
| 6 | $t^2$ | $\frac{2!}{p^3}$ |
| 7 | $t^n \quad (n=1,2,3..)$ | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ |

## 12.2 ЗАКОНЫ ОМА И КИРХГОФА В ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМЕ.

Одним из свойств преобразования Лапласа является то, что при переходе от оригиналов к изображениям не нарушаются алгебраические равенства, установленные для оригиналов.

В частности для теории цепей существенно, то при переходе к изображениям сохраняются законы Ома и Кирхгофа электрических цепей.

В активном сопротивлении R по закону Ома:

$U(t) = i(t) \cdot R$;

После перехода к изображениям получаем закон Ома в операторной форме:

$$U(p) = I(p) \cdot R \qquad (12.2)$$

Для изображений токов, напряжений и ЭДС цепи выполняются законы Кирхгофа.

*Первый закон Кирхгофа в операторной форме* – алгебраическая сумма изображений токов, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю:

$$\sum I(p) = 0 \qquad (12.3)$$

*Второй закон Кирхгофа в операторной форме* – в замкнутом контуре алгебраическая сумма изображений напряжений равна алгебраической сумме изображений ЭДС с учетом независимых начальных условий:

$$\sum U(p) = \sum E(p) \pm Li_L(0) \pm \frac{U_C(0)}{p}. \qquad (12.4)$$

## 12.3 ОПЕРАТОРНЫЕ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ.

### 12.3.1 Операторная схема замещения емкости

Если известно изображение $F(p)$ функции оригинала $f(t)$, то изображение интеграла оригинала во времени определяется следующей формулой, называемой *формулой* или *теоремой интегрирования*:

$$\int_0^t f(t)dt = \frac{F(p)}{p} \qquad (12.5)$$

Если емкость к начальному моменту времени $t = 0$ не заряжена, то ее напряжение:

$U_C(t) = \frac{1}{c}\int_0^t idt$

Согласно теореме интегрирования изображение напряжения на емкости:

$$U(p) = \frac{1}{pC} \cdot I(p) \qquad (12.6)$$

При помощи преобразования Лапласа вместо интегрального соотношения для оригиналов приходят к алгебраическому выражению (12.6) для изображений. Изображения напряжения и тока связаны законом Ома, если в качестве сопротивления рассматривать величину:

$$Z_C(p) = \frac{1}{pC}$$

где $\frac{1}{pC}$ – операторное сопротивление емкости.

Операторная схема замещения, для которой справедливо выражение 12.6, показана на рисунке (12.1, б):

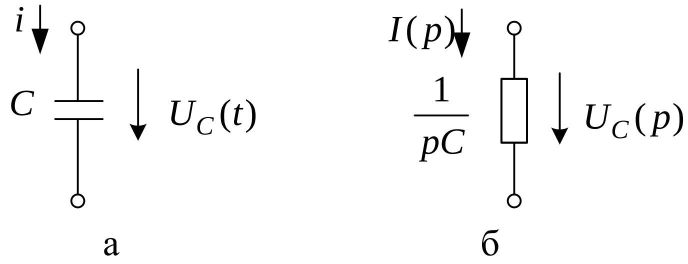



Рисунок *12.1* Операторная схема замещения конденсатора, не заряженного к моменту коммутации.

Если емкость к моменту времени $t = 0$ заряжена до напряжения $U_c(0_-)$, то напряжение на емкости равно:

$$U_c(t) = U_c(0_-) + \frac{1}{c}\int_0^t idt \quad ;$$

Используя теорему интегрирования и изображения постоянной, перейдем от последнего равенства к изображению $U_c(p)$:

$$U_c(p) = \frac{U_c(0_-)}{p} + \frac{1}{pC} \cdot I(p) \qquad (12.7)$$

Изображение напряжения на конденсаторе (12.7) помимо омической составляющей, пропорциональной операторному сопротивлению емкости $Z(p) = \frac{1}{pc}$ и ее изображению тока $I(p)$, содержит независящее от тока слагаемое $\frac{U_C(0_-)}{p}$, которое на схеме замещения может быть представлено как источник напряжения.

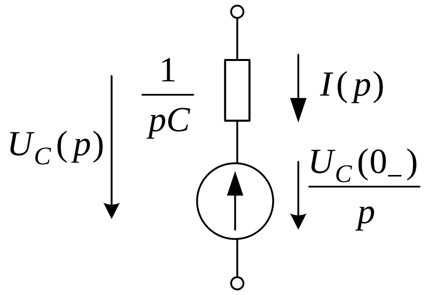



Рисунок *12.2* Операторная схема замещения конденсатора, заряженного к моменту коммутации.

### 12.3.2 Схема замещения индуктивности

Если известно изображение $F(p)$ временной функции $f(t)$, то изображение производной последней:

$$\frac{df}{dt} = pF(p) - f(0_-) \tag{12.8}$$

где $f(0_-)$ − начальное значение временной функции.

Ток и напряжение на индуктивности связаны дифференциальным соотношением:

$$U_L(t) = L\frac{di}{dt}$$

Используя теорему дифференцирования, перейдем к изображению:

$$U_L(p) = pL \cdot I(p) - L \cdot i(0_-) \tag{12.9}$$

где $i(0_-)$ – начальное значение тока индуктивности, соответствующее выражению (12.8). Операторная схема замещения индуктивности показана на рис 4.3.

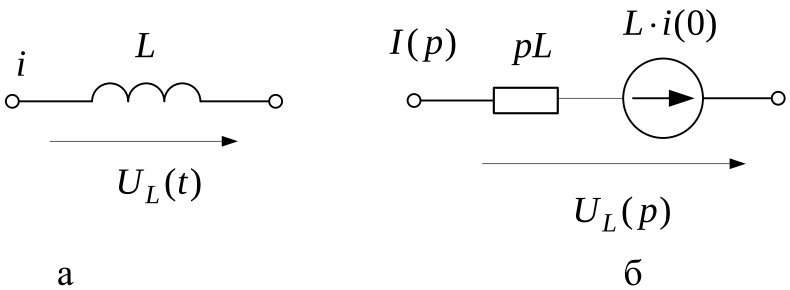



Рисунок *12.3* Операторная схема замещения индуктивности

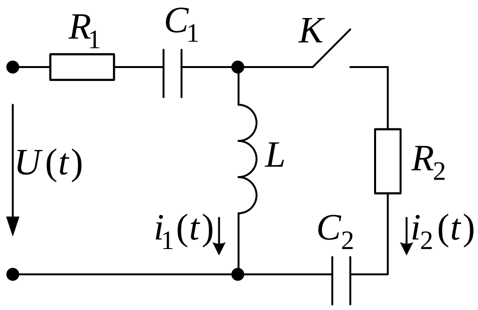
Здесь индуктивность представлена операторным сопротивлением $pL$ и источником напряжения $Li(0_-)$, направление Э.Д.С. которого, совпадает с направлением тока через индуктивность до коммутации.

Источники Э.Д.С. $\frac{Uc(0)}{p}$ и $Li(0\_)$ называются *внутренними операторными* Э.Д.С. Они обусловлены запасом энергии магнитного и электрического полей конденсатора и катушки соответственно.

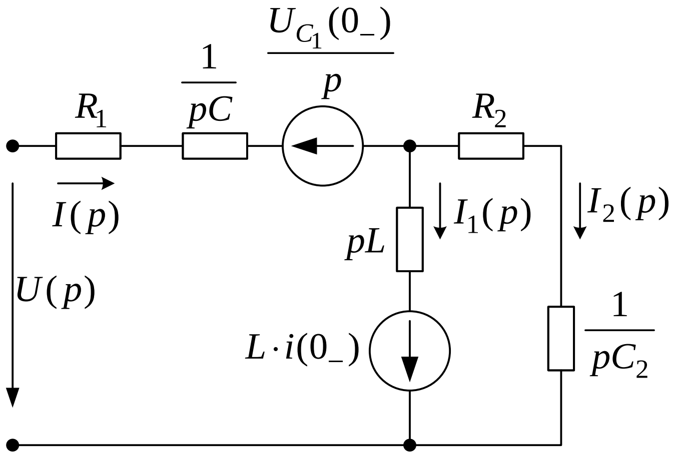
В схеме с нулевыми начальными условиями эти Э.Д.С. отсутствуют.

Пример построения операторной схемы замещения:

Задана схема. Коммутация происходит в результате замыкания ключа К. Составить операторную схему замещения.




а)




б)

Рисунок 12.4 Пример построения операторной схемы замещения

До коммутации под действием входного переменного напряжения по ветви $R_1 - C_1 - L$ протекал ток, отличный от нуля. На конденсаторе $C_1$ действовало напряжение, также отличное от нуля, т. е.

$$U_{C_1}(0_-) = U_{C_1}(0_+) \neq 0;\; i_1(0_-) = i_1(0_+) \neq 0.$$

Следовательно, в операторной схеме замещения будут присутствовать операторные Э.Д.С. $\frac{Uc1(0)}{p}$ и $L \cdot i_1(0)$.

## 12.4 АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

1. Задаются положительными направлениями тока в цепи и составляют операторную схему замещения.
2. Рассчитывают операторную схему замещения одним из известных методов расчета цепей постоянного и переменного тока: с помощью законов Кирхгофа, методом контурных токов, методом узловых потенциалов, методом эквивалентного генератора и т.д. и находят изображения искомых токов или напряжений $I_L(p)$, $U_C(p)$, и т. д.
3. По найденным изображениям определяют оригиналы, т. е. $i_L(t)$, $u_C(t)$
4. Получив окончательные математические выражения искомых величин, строят графики для иллюстрации найденных результатов.

## 12.5 ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ

- Если искомое изображение (например, ток) имеет вид рациональной дроби :

$$I(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}=\frac{a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1} + a_m p^m + ... + a_1 p \ + a_0}{b_n(p-p_1)(p-p_2)...(p-p_n)}$$

то переход к функции времени производят по формуле:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq f(t)=\sum\frac{F_1(p_k)e^{p_k t}}{F_2{}'(p_k)}, \qquad (12.10)$$

где $p_k$ −корни знаменателя $F_2(p)$.

Число слагаемых в выражении 12.10 равно числу корней знаменателя $F_2(p)=0$.

*При использовании формулы 12.10 надо знать*:

1. Формула разложения применима при любых начальных условиях и при любых практически встречающихся формах напряжения, воздействующих на схему.
2. Если начальные условия – ненулевые, то в состав $F_1(p)$ войдут «внутренние» операторные э.д.с.
3. Если уравнение $F_2(p)=0$ имеет комплексно – сопряженные корни, то при вычислении соответствующих им слагаемых, стоящих в правой части уравнения, достаточно определить слагаемое одного из этих корней, а для сопряженного корня следует взять сопряженное значение. Сумма, соответствующая этим двум слагаемым, равна удвоенному значению вещественной части одного из слагаемых.