## 13.1 РАСЧЕТЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НАПРЯЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ. ИНТЕГРАЛ НАЛОЖЕНИЯ (ДЮАМЕЛЯ) И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ АНАЛИЗЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ.

Интеграл Дюамеля применяют для расчета переходного процесса (выходного сигнала) в линейной пассивной электрической цепи с нулевыми начальными условиями при воздействии на нее напряжения $U(t)$, имеющего произвольную аналитическую или кусочно - аналитическую форму (рис. 13.1)

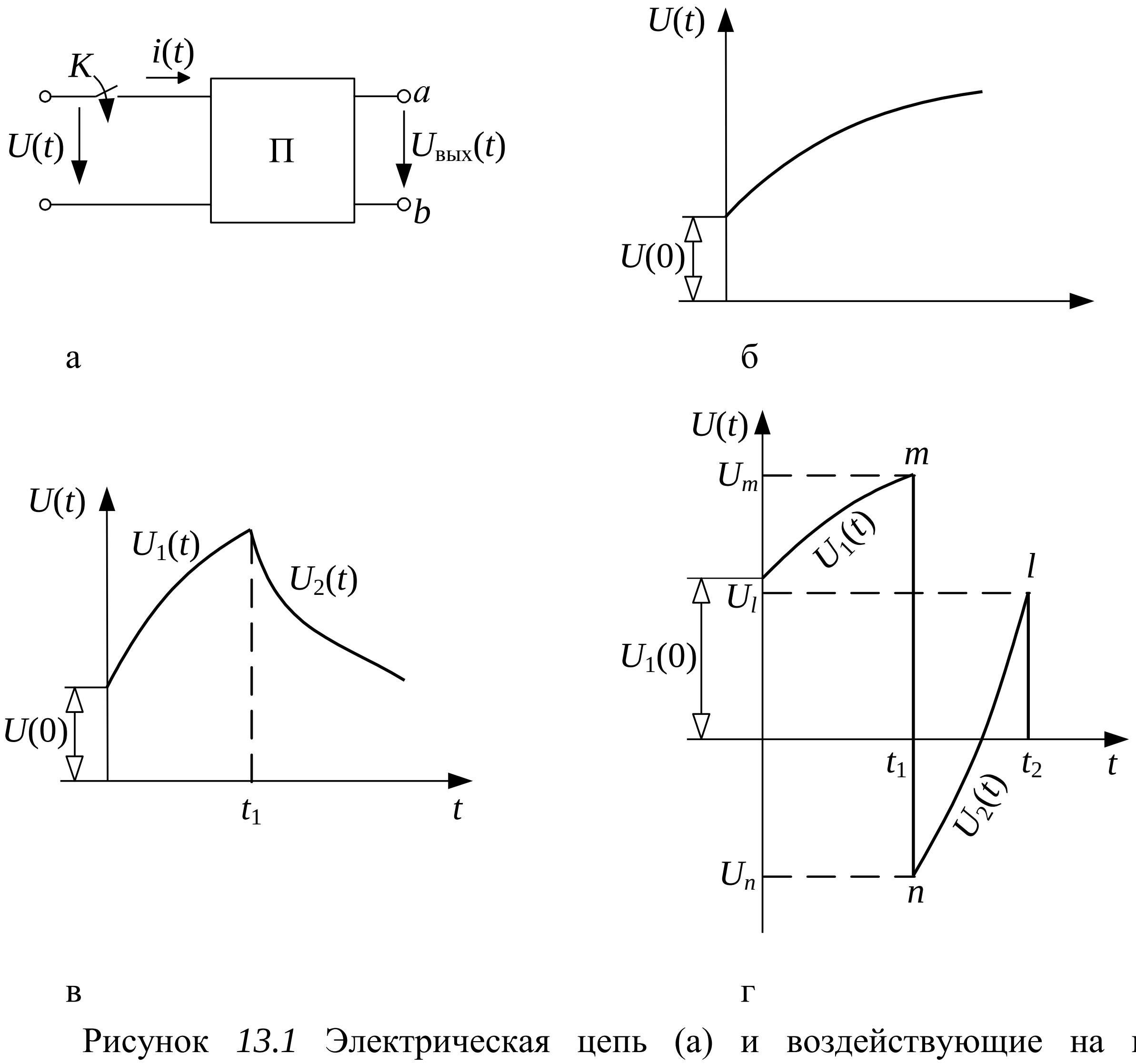


Рисунок *13.1* Электрическая цепь (а) и воздействующие на нее напряжения произвольной формы (б, в, г)

Применение интеграла Дюамеля требует знания выражений для переходной характеристики цепи и входного воздействия (сигнала) $f_{вх}(t)$.

### 13.1.1 Расчет переходных характеристик цепи

*Переходной характеристикой цепи* называют реакцию цепи с нулевыми начальными условиями на единичное воздействие, т.е. на входной сигнал единичной величины.

Т.к. воздействие и реакция могут быть током или напряжением, то возможны четыре их сочетания. Различают переходную проводимость $g(t)$, переходное сопротивление $z(t)$ и переходные характеристики передачи по току − $h_i(t)$ и по напряжению $h_u(t)$.

Переходная характеристика цепи совпадает с переходным током или напряжением при подключении цепи к источнику постоянного напряжения (тока) единичной величины.

Например, при заданных $R$ и $L$, требуется определить переходную проводимость $g(t)$ и переходные функции по напряжению на участках с резистором и индуктивностью: $h_{U_R}(t)$, $h_{U_L}(t)$

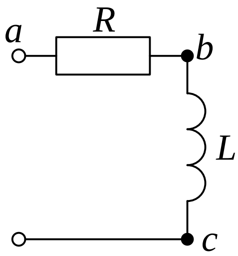


Рисунок *13.2* Цепь R – L для определения переходных характеристик по току и напряжению.

Известно, что при подключении такой цепи на постоянное напряжение $U$ ток переходного режима определяется соотношением:

$$i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Напряжение на активном сопротивлении и на индуктивности определяют выражениями:

$$U_R(t) = U\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right);$$

$$U_L(t) = Ue^{-\frac{R}{L}t}.$$

Тогда $$g(t)=i(t)\big|_{U=1}=\frac{1}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right);$$

$$h_{U_R}(t)=U_R(t)\big|_{U=1}=\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right);$$

$$h_{U_L}(t)=U_L(t)\big|_{U=1}=e^{-\frac{R}{L}t}.$$

### 13.1.2 Применение интеграла Дюамеля

Таблица 13.1

| $f_{\text{вх}}(t)$ | $f_{\text{вых}}(t)$ | $h(t)$ | $f_{\text{вых}}(t)=f_{\text{вх}}(0)h(t)+\int_0^t f'_{\text{вх}}(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ |
|---|---|---|---|
| $u$ | $u$ | $h_u(t)$ − переходная характеристика по напряжению | $u_{\text{вых}}(t)=u_{\text{вх}}(0)h_u(t)+\int_0^t u'_{\text{вх}}(\tau)h_u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ |
| $i$ | $i$ | $h_i(t)$ − переходная характеристика по току | $i_{\text{вых}}(t)=i_{\text{вх}}(0)h_i(t)+\int_0^t i'_{\text{вх}}(\tau)h_i(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ |
| $u$ | $i$ | $g(t)$ − переходная проводимость | $i_{\text{вых}}(t)=u_{\text{вх}}(0)g(t)+\int_0^t u'_{\text{вх}}(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ |
| $i$ | $u$ | $z(t)$ − переходное сопротивление | $u_{\text{вых}}(t)=i_{\text{вх}}(0)z(t)+\int_0^t i'_{\text{вх}}(\tau)z(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ |

Если напряжение, воздействующее на линейную пассивную цепь (Рис.13.1, а), является непрерывно изменяющейся функцией времени (рис. 13.1, б), то ток в любой ветви определяется формулой (13.1), а напряжение на отдельном участке формулой (13.2):

$$i(t) = U(0)y(t) + \int_0^t U'(\tau)y(t-\tau)d\tau \qquad (13.1)$$

$$U_{ab}(t) = U(0)\cdot h_u(t) + \int_0^t U'(\tau)h_U'(t-\tau)d\tau \qquad (13.2)$$

где $U(0)$ − входное напряжение в момент включения;

$U'(\tau)$− производная по времени от входного напряжения, в которой $t$ заменено на $\tau$;

$y(t), h_U(t)$ − переходные проводимость и функция по напряжению соответственно;

$y(t-\tau), h_U(t-\tau)$ − переходные проводимость и функция по напряжению, в которых $t$ заменено на $t-\tau$.

В зависимости от вида входного и выходного сигналов (см. табл. 13.1) выбирается соответствующая формула записи интеграла Дюамеля.

Если воздействующее на цепь напряжение изменяется хотя и непрерывно, но имеет разные аналитические выражения на отдельных интервалах времени (рис. 13.1, в), то ток и напряжение на каком-либо участке цепи в переходном режиме находятся для каждого интервала отдельно. Так, если воздействующее на цепь напряжение имеет два аналитических выражения $U_1(t)$ и $U_2(t)$ (рис. 13.1, в), то ток и напряжение на каком-либо участке в переходном режиме будут определяться двумя аналитическими выражениями. Одно из них будет соответствовать первому интервалу времени от 0 до $t_1$, когда входное напряжение изменяется по закону $U_1(t)$, другое будет соответствовать интервалу времени от $t_1$ до $\infty$, когда входное напряжение изменяется по закону $U_2(t)$. В первом интервале времени $0 \le t < t_1$, ток в какой-либо ветви и напряжение на каком либо участке цепи $ab$ определятся формулами (13.3) и (13.4) соответственно:

$$i_1(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^t U_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau, \qquad (13.3)$$

$$U_{ab_1}(t) = U_1(0)\cdot h_u(t) + \int_0^t U_1'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau. \qquad (13.4)$$

Во втором интервале времени $t_1 \le t < \infty$ ток в этой же ветви и напряжение на этом же участке цепи *ab* определятся формулами (13.5), (13.6):

$$i_2(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^t U_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^t U_2'(\tau)g(t-\tau)d\tau, \qquad (13.5)$$

$$U_{ab2}(t) = U_1(0)\cdot h_u(t) + \int_0^t U_1'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^t U_2'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau \qquad (13.6)$$

Следует особое внимание обратить на случай, когда воздействующее на цепь напряжение не только определяется несколькими аналитическими выражениями, но и претерпевает скачки в какие - то моменты времени. Так, если на цепь воздействует напряжение, имеющее форму, показанную на рис 13.1, г, то время переходного процесса разбивается на три интервала:

1) Интервал $0 \le t < t_1$, не включая скачка напряжения от $U_m$ до $-U_n$. В этом интервале ток в ветви и напряжение на участке цепи *ab* определяется по формулам (13.3) и 13.(4);
2) Второй интервал $t_1 \le t < t_2$, не включая скачка от $U_l$ до нуля. В этом интервале ток и напряжение в переходном режиме определяются формулами (13.7) и (13.8):

$$i_2(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^{t_1} U_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau - (U_m + U_n)g(t-t_1) + \int_{t_1}^t U_2'(\tau)g(t-\tau)d\tau; \qquad (13.7)$$

$$U_{ab_2}(t) = U_1(0)\cdot h_u(t) + \int_0^{t_1} U_1'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau - (U_m + U_n)h_u(t-t_1) + \int_{t_1}^t U_2'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau. \qquad (13.8)$$

*Примечание:* Определенные пределы у интегралов отражают окончание и начало их действия. Переходная характеристика в третьем члене выражения получила смещение на величину $t_1$, т.к. определяется реакция цепи для $t > t_1$. Во втором интеграле этого смещения вводить не нужно, т.к. оно учтено нижним пределом интегрирования.

Заметим также, что *нельзя использовать предыдущий результат расчета*, т.к. изменились пределы интегрирования.

3) Третий интервал $t_2 \le t < \infty$. В этом интервале воздействующее напряжение равно нулю. Ток и напряжение $U_{ab}$ переходного режима в этом интервале определяются выражениями (13.9) и (13.10):

$$i_2(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^{t_1} U_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau - (U_m + U_n)g(t-t_1) + \\ + \int_{t_1}^{t_2} U_2'(\tau)g(t-\tau)d\tau - U_l g(t-t_2) + 0, \tag{13.9}$$

$$U_{ab_3}(t) = U_1(0)\cdot h_u(t) + \int_0^{t_1} U_1'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau - (U_m + U_n)h_u(t-t_1) + \\ + \int_{t_1}^{t_2} U_2'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau - U_l h_u(t-t_2) + 0. \tag{13.10}$$

### 13.1.3 Алгоритм расчета переходного процесса с помощью интеграла Дюамеля

1. Рассчитывают необходимые переходные характеристики цепи.
2. Записывают аналитически выражение входного сигнала $f(t)$ на каждом интервале времени.
3. Определяют формулу интеграла Дюамеля для каждого интервала времени.
4. Записывают необходимые для решения интеграла функции, которые получают путем подстановки $t = \tau$ или $t - \tau$ в выражения $g(t)$, $h(t)$, $h'(t)$, $f(t)$, $f'(t)$.
5. Получают выражения для расчета выходного сигнала на каждом интервале, приводя их к более простому виду.
6. Делают оценку полученных результатов (верно − неверно).
7. Результаты расчета сводят в таблицу.

8. Строят в масштабе совмещенные графики входного и выходного сигналов (масштабы для сигнала и реакции выбирают так, чтобы графики получались соизмеримыми).