

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

«Белорусский государственный университет информатики и
радиоэлектроники»

Кафедра теоретических основ электротехники

Типовой расчет

«Расчет переходных процессов в электрических цепях»

Вариант № 8

Выполнил: ст. гр. 220651
Веркеев А.С.

Минск 2025

1. Классический метод расчета переходных процессов

1.1 Задание

Электрическая схема представлена на рисунке 1.

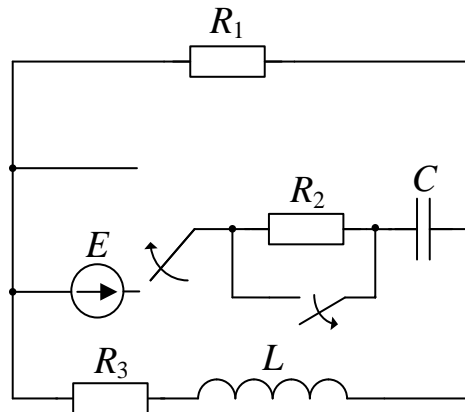


Рисунок – 1

Исходные данные представлены в таблице 1.

Таблица 1

$E, В$	$\omega, рад$	$R_1, Ом$	$R_2, Ом$	$R_3, Ом$	$L, мГн$	$C, мкф$
84	10000	85	40	42	23	1,08

1.2 Расчет независимых начальных условий по схеме до коммутации

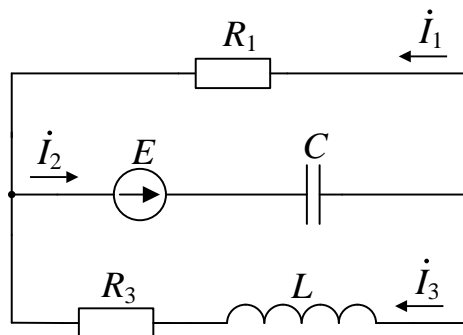


Рисунок 2 – Схема до коммутации

Определяем реактивные сопротивления индуктивности и емкости

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^4 \cdot 1,08 \cdot 10^{-6}} = 92,59 \text{ Ом};$$

$$X_L = \omega L = 10^4 \cdot 23 \cdot 10^{-3} = 230 \text{ Ом}.$$

Определяем комплексное сопротивление цепи относительно источника

$$Z = -jX_C + \frac{R_1 \cdot (R_3 + jX_L)}{R_1 + R_3 + jX_L} = -92,59j + \frac{85 \cdot (42 + 230j)}{85 + 42 + 230j} = 99,18e^{-43,7^\circ j} \text{ Ом}$$

Определяем комплексную амплитуду тока в ветви с источником по закону Ома

$$\dot{I}_{2m} = \frac{\dot{E}_m}{Z} = \frac{84}{99,18e^{-43,7^\circ j}} = 0,85e^{43,7^\circ j} \text{ А}.$$

Определяем комплексную амплитуду тока в ветви с катушкой индуктивности по правилу плеч

$$\dot{I}_{3m} = \dot{I}_{2m} \frac{R_1}{R_1 + R_3 + jX_L} = 0,85e^{43,7^\circ j} \cdot \frac{85}{85 + 42 + 230j} = 0,27e^{-17,4^\circ j} \text{ А}.$$

Определяем комплексную амплитуду напряжения на емкости

$$\dot{U}_{Cm} = \dot{I}_{2m} \cdot (-jX_C) = 0,85e^{43,7^\circ j} \cdot (-92,59j) = 78,42e^{-46,3^\circ j} \text{ В}.$$

Записываем мгновенные значения тока в индуктивности и напряжения на емкости

$$i_L(t) = 0,27 \sin(10^4 t - 17,4^\circ) \text{ A};$$

$$u_C(t) = 78,42 \sin(10^4 t - 46,3^\circ) \text{ В.}$$

Определяем ток в индуктивности и напряжение на емкости непосредственно перед коммутацией

$$i_L(0-) = i_L(0+) = 0,27 \cdot \sin(-17,4^\circ) = -0,08 \text{ A};$$

$$u_C(0-) = u_C(0+) = 78,42 \cdot \sin(-46,3^\circ) = -56,7 \text{ В.}$$

1.3 Расчет принужденных составляющих напряжения на емкости и тока в индуктивности по схеме после коммутации

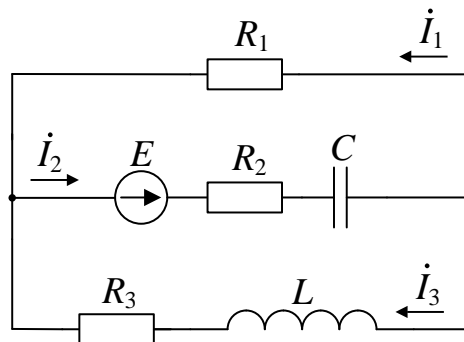


Рисунок 3 – Схема после коммутации

Определяем комплексное сопротивление цепи относительно источника

$$\begin{aligned} Z &= R_2 - jX_C + \frac{R_1 \cdot (R_3 + jX_L)}{R_1 + R_3 + jX_L} = 40 - 92,59j + \frac{85 \cdot (42 + 230j)}{85 + 42 + 230j} = 99,18e^{-43,7^\circ} j = \\ &= 131,05e^{-31,52^\circ} j \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Определяем комплексную амплитуду тока в ветви с источником по закону Ома

$$\dot{I}_{2m} = \frac{\dot{E}_m}{Z} = \frac{84}{131,05e^{-31,52j}} = 0,64e^{31,52^\circ j} \text{ А.}$$

Определяем комплексную амплитуду тока в ветви с катушкой индуктивности по правилу плеч

$$\begin{aligned} \dot{I}_{3m} &= \dot{I}_{2m} \frac{R_1}{R_1 + R_3 + jX_L} = 0,64e^{31,52^\circ j} \cdot \frac{85}{85 + 42 + 230j} = \\ &= 0,21e^{-29,57^\circ j} \text{ А.} \end{aligned}$$

Определяем комплексную амплитуду тока на емкости

$$\dot{U}_{cm} = \dot{I}_{2m} (-jX_C) = 0,64e^{31,52^\circ j} \cdot (-92,59j) = 59,35e^{-58,48^\circ j} \text{ В.}$$

Записываем мгновенные значения тока в индуктивности и напряжение на емкости, то есть искомые принужденные составляющие

$$i_{Lпр}(t) = 0,21 \sin(10^4 t - 29,57^\circ) \text{ А;}$$

$$u_{Cпр}(t) = 59,35 \sin(10^4 t - 58,48^\circ) \text{ В.}$$

1.4 Расчет корней характеристического уравнения

Запишем и решим характеристическое уравнение. Для этого в схеме после коммутации на представленной на рисунке 3 источник ЭДС заменим короткозамкнутым участком ($R_{вн} = 0$) и разорвем ветвь с конденсатором. Полученная схема представлена на рисунке 4.

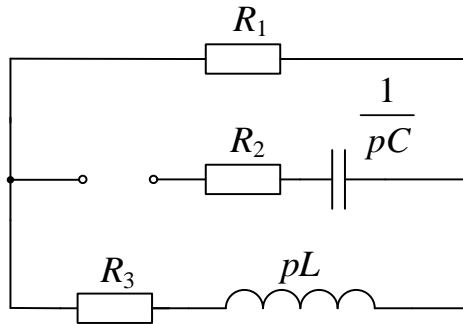


Рисунок 4 – Схема для составления характеристического уравнения

Определяем комплексное входное сопротивление относительно точек разрыва (см. рис. 4)

$$Z(p) = R_2 + pL + \frac{R_1 \cdot (R_3 + pL)}{R_1 + R_3 + pL}.$$

Приравниваем выражение $Z(p)$ к нулю, решаем полученное уравнение и определяем его корни

$$Z(p) = \frac{1}{1,08 \cdot 10^{-6} p} + 40 + \frac{85 \cdot (42 + 23 \cdot 10^{-3} p)}{85 + 42 + 23 \cdot 10^{-3} p} = 0;$$

$$p_1 = -5208 - 3712j;$$

$$p_2 = -5208 + 3712j.$$

Обозначим $\delta = 5208$, $\omega_{св} = 3712$.

1.5 Расчет вида свободной составляющей тока в индуктивности и напряжения на емкости

$$i_{L_{CB}}(t) = Ae^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_{CB}t + \psi_1);$$

$$u_{C_{CB}}(t) = Be^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_{CB}t + \psi_2).$$

Записываем полный переходный ток в индуктивности

$$i_L(t) = i_{L_{пр}}(t) + i_{L_{CB}}(t) = 0,21\sin(10^4t - 29,57^\circ) + Ae^{-5208t} \cdot \sin(3712t + \psi_1).$$

В последнем уравнении неизвестными являются постоянная интегрирования A и начальная фаза свободных колебаний ψ_1 . Для их определения запишем второе уравнение полученного путем дифференцирования первого

$$\frac{di_L(t)}{dt} = 2074\cos(10^4t - 29,57^\circ) + 3712Ae^{-5208t} \cos(3712t + \psi_1) - 5208Ae^{-5208t} \sin(3712t + \psi_1) \text{ А.}$$

Полагая в вышеперечисленных уравнениях $t = 0+$, получаем систему уравнений (1)

$$\begin{cases} i_L(0+) = 0,21\sin(-29,57^\circ) + A\sin(\psi_1); \\ \frac{di_L(0+)}{dt} = 2074\cos(-29,57^\circ) + 3712A\cos(\psi_1) - 5208A\sin(\psi_1). \end{cases}$$

Записываем полное переходное напряжение на емкости

$$u_C(t) = u_{Cпр}(t) + u_{Cсв}(t) = 59,35 \sin(10^4 t - 58,48) + B e^{-5208t} \sin(3712t + \psi_2) \text{ В.}$$

В последнем уравнении неизвестными являются постоянная интегрирования B и начальная фаза свободных колебаний ψ_2 . Для их определения запишем второе уравнение полученного путем дифференцирования первого

$$\begin{aligned} \frac{du_C(t)}{dt} = 593508,3 \cos(10^4 t - 58,48^\circ) + 3712 B e^{-5208t} \cos(3712t + \psi_2) - \\ - 5208 B e^{-5208t} \sin(3712t + \psi_2) \text{ В.} \end{aligned}$$

Полагая в вышеперечисленных уравнениях $t = 0+$, получаем систему уравнений (2)

$$\begin{cases} u_C(0+) = 59,35 \sin(-58,48^\circ) + B \sin(\psi_2); \\ \frac{du_C(0+)}{dt} = 593508,3 \cos(-58,48^\circ) + 3712 B \cos(\psi_2) - 5208 B \sin(\psi_2). \end{cases}$$

1.6 Расчет зависимых начальных условий

Определяем производную тока в индуктивности решая систему уравнений по законам Кирхгофа для момента времени $t = 0+$ составленной для послекоммутационной схемы

$$\begin{cases} i_L(0+) R_3 + L \frac{di_L(0+)}{dt} + u_c(0+) + i_2(0+) R_2 = e(0+); \\ i_L(0+) R_3 + L \frac{di_L(0+)}{dt} + i_1(0+) R_1 = e(0+); \\ i_1(0+) = i_2(0+) - i_L(0+). \end{cases}$$

Подставляя в последнюю систему уравнений известные значения определяем $\frac{di_L(0+)}{dt}$ и $i_2(0+)$

$$\frac{di_L(0+)}{dt} = 5075,01 \text{ A/c};$$

$$i_2(0+) = -1,42 \text{ A}.$$

Так как $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$, то можем найти производную напряжения в емкости для момента коммутации

$$\frac{du_C(0+)}{dt} = \frac{i_2(0+)}{C} = -1309889 \text{ В/с}.$$

1.7 Расчет зависимых начальных условий вторым способом, по схеме замещения

Для момента сразу после коммутации заменяем схему рисунке 3 на эквивалентную схему замещения представленную на рисунке 5, в которой независимые начальные условия $i_L(0+)$ и $u_C(0+)$ представлены в виде источника тока и источника ЭДС соответственно

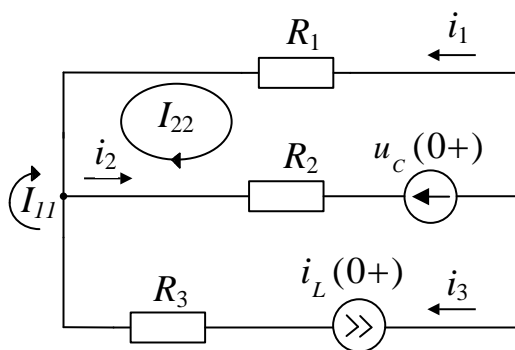


Рисунок 5 – Схема замещения для момента коммутации

Определяем зависимые начальные условия по методу контурных токов.
Записываем уравнение

Записываем уравнение

$$I_{11}(R_2 - R_1) + I_{22}(-R_2) = u_C(0+),$$

где $I_{11} = -i_2(0+)$ и $I_{22} = -i_2(0+)$.

Тогда

$$i_2(0+) = \frac{u_C(0+) + i_L(0+) \cdot R_2}{R_1 - R_2} = -1,42 \text{ А.}$$

Так как $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$, то производная напряжения на емкости

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i_2(0+)}{C} = \frac{-1,42}{1,08 \cdot 10^{-6}} = -1309889 \text{ В/с.}$$

Рассчитываем производную тока в индуктивности.

Определяем по первому закону Кирхгоффа ток $i_1(0+)$:

$$i_1(0+) = i_2(0+) - i_L(0+) = -1,42 - (-0,08) = -1,33 \text{ А.}$$

Определяем производную тока на индуктивности

$$\begin{aligned} \frac{di_L(0+)}{dt} &= \frac{u_L(0+)}{L} = \frac{-i_1(0+)R_1 - i_L(0+)R_2}{L} = \frac{-1,33 \cdot 85 - (-0,08) \cdot 40}{23 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 5075,01 \text{ А/с} \end{aligned}$$

1.7 Расчет постоянных интегрирования для тока на индуктивности и напряжения на емкости

Подставляем найденные значения $i_L(0+)$ и $\frac{di_L(0+)}{dt}$ в систему уравнений (1) и рассчитываем постоянную интегрирования A и начальную фазу свободных колебаний ψ_1

$$\begin{cases} -0,08 = 0,21\sin(-29,57^\circ) + A\sin(\psi_1); \\ 5075,01 = 2074\cos(-29,57^\circ) + 3712A\cos(\psi_1) - 5208A\sin(\psi_1). \end{cases}$$

$$A = 0,91;$$

$$\psi_1 = 1,29^\circ.$$

Подставляем найденные значения $u_C(0+)$ и $\frac{du_C(0+)}{dt}$ в систему уравнений (2) и рассчитываем постоянную интегрирования B и начальную фазу свободных колебаний ψ_2

$$\begin{cases} -56,67 = 59,35\sin(-58,48^\circ) + B\sin(\psi_2); \\ -1309889 = 593508,3\cos(-58,48^\circ) + 3712B\cos(\psi_2) - 5208B\sin(\psi_2). \end{cases}$$

$$B = -445,1;$$

$$\psi_1 = 0,107^\circ.$$

1.8 Расчет времени переходного процесса

Определяем постоянную времени τ

$$\tau = \frac{1}{|p_{\min}|} = \frac{1}{5208} = 0,19 \text{ мс.}$$

Тогда время переходного процесса

$$t_{\text{III}} = 3\tau = 3 \cdot 0,19 = 0,58 \text{ мс.}$$

Записываем окончательные выражения переходного тока в индуктивности и напряжения на емкости

$$i_L(t) = 0,21 \sin(10^4 t - 29,57^\circ) + 0,91 e^{-5208t} \cdot \sin(3712t - 1,29^\circ) \text{ А;}$$

$$u_C(t) = 59,35 \sin(10^4 t - 58,48^\circ) - 445,1 e^{-5208t} \sin(3712t + 0,79^\circ) \text{ В.}$$

Графики переходного тока на индуктивности и переходного напряжения на емкости представлены на рисунках 6 и 7 соответственно.

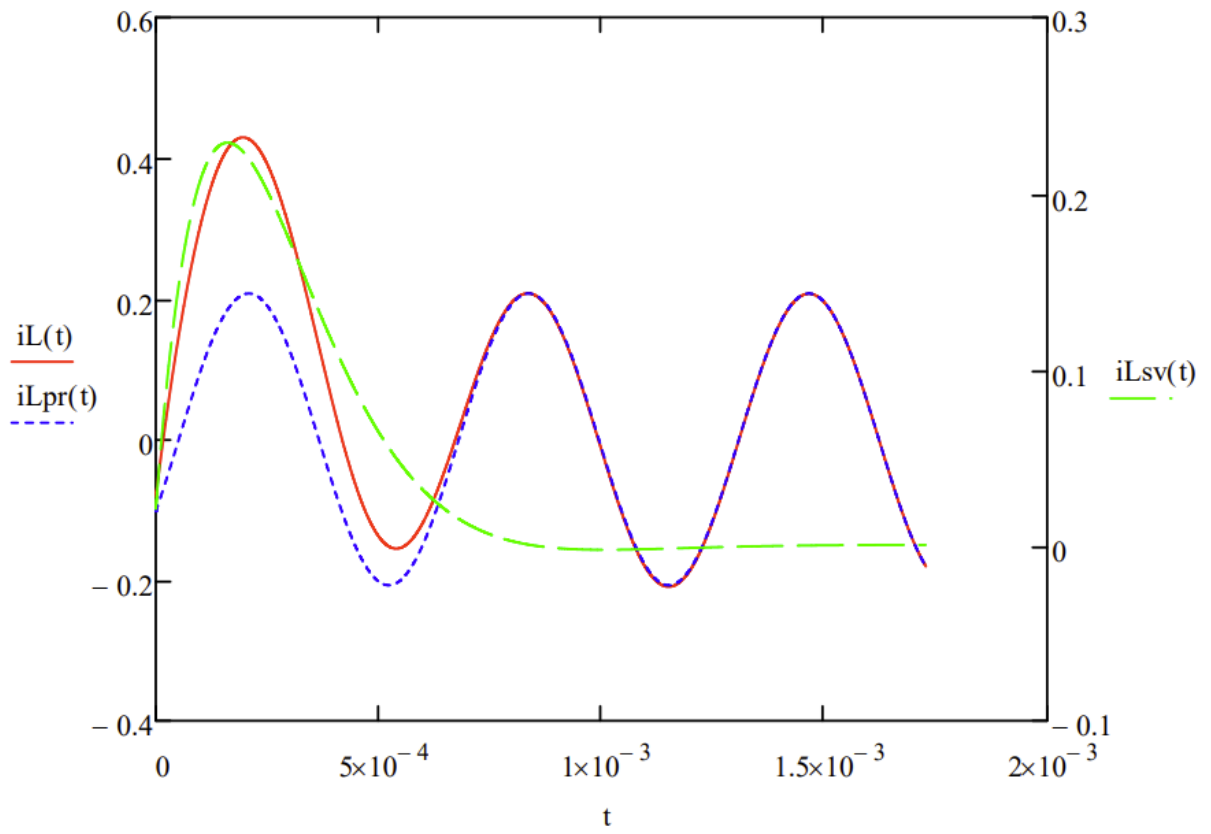


Рисунок 6

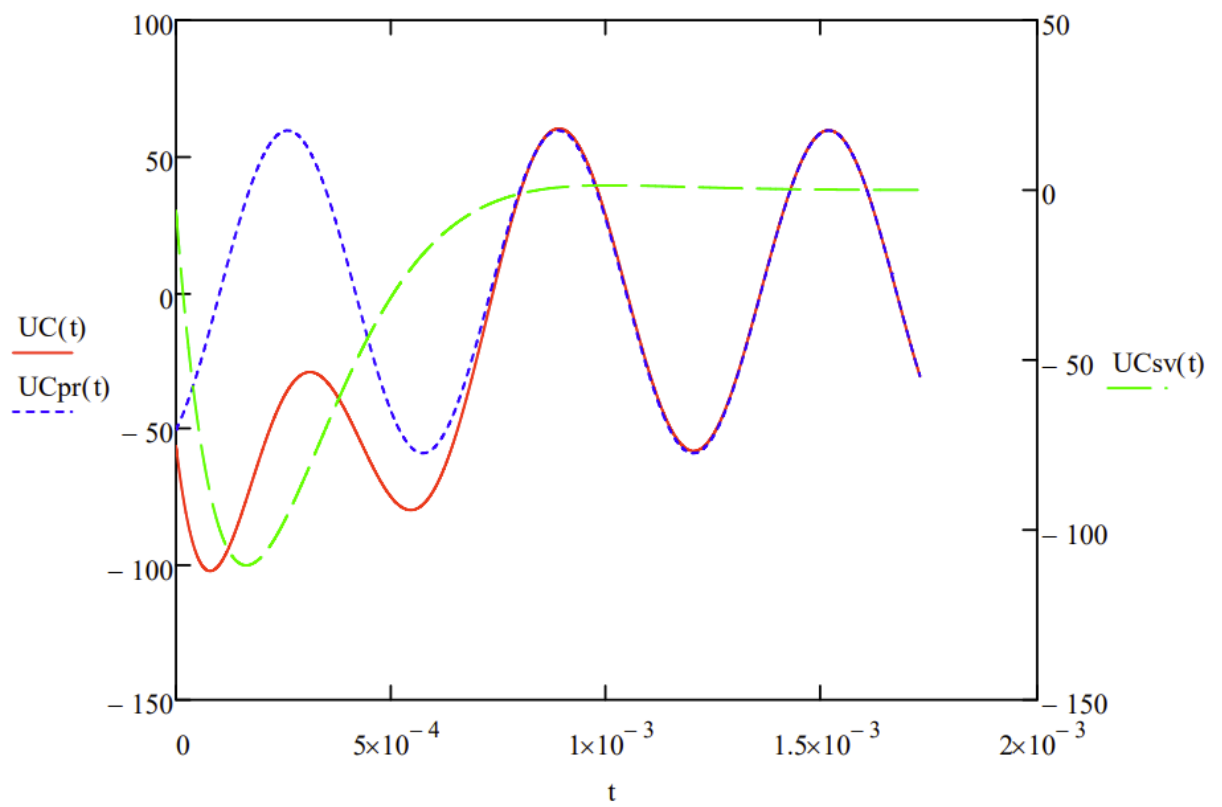


Рисунок 7

2. Операторный метод расчета переходных процессов

2.1 Задание

Электрическая схема представлена на рисунке 1.

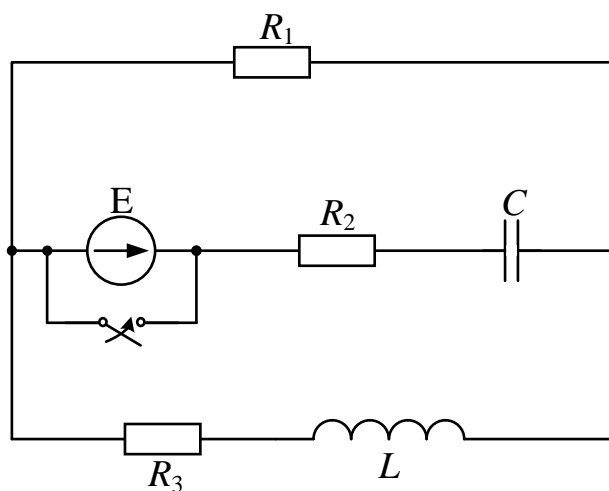


Рисунок – 8

Исходные данные представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Исходные данные

$E, В$	$\omega, \text{рад}$	$R_1, \text{Ом}$	$R_2, \text{Ом}$	$R_3, \text{Ом}$	$L, \text{мГн}$	$C, \text{мкф}$
84	10000	85	40	42	23	1,08

2.2 Расчет независимых начальных условий по схеме до коммутации

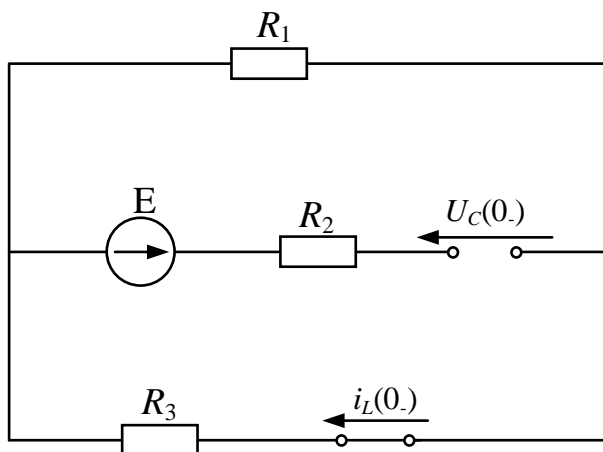


Рисунок 9 – Схема до коммутации

Определяем ток в цепи с индуктивностью и напряжение на ёмкости непосредственно перед коммутацией

$$i_2(0-) = 0 \text{ А};$$

$$u_C(0-) = E = 84 \text{ В}.$$

2.3 Расчет операторной схемы замещения послекоммутационной цепи методом контурных токов

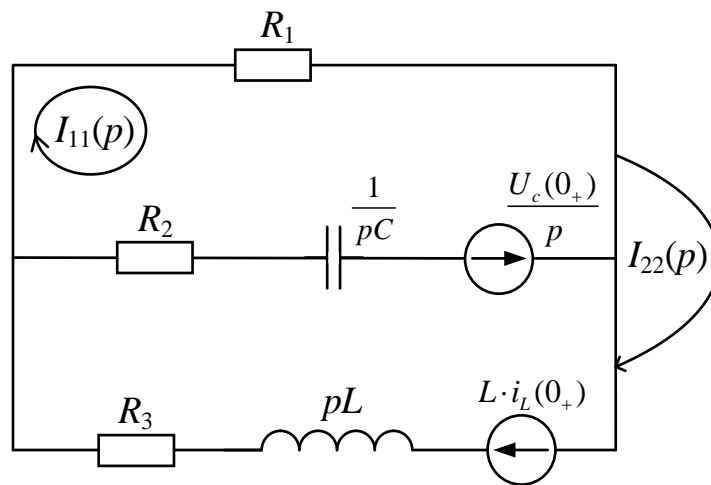


Рисунок 10 – Операторная схема замещения

Записываем уравнения, описывающие цепь по методу контурных токов

$$\begin{cases} \left(R_1 + R_3 + \frac{1}{pC} \right) I_{11}(p) + R_1 I_{22}(p) = \frac{u_C(0+)}{p} \\ R_1 I_{11}(p) + (R_1 + R_2 + pL) I_{22}(p) = L i_2(0+) \end{cases}$$

Решая полученную систему, получаем

$$I_{11}(p) = -\frac{pLC(u_C(0+) + i_3(0+)R_1) + C(R_1 + R_3)u_C(0+)}{p^2LC(R_1 + R_2) + p(C(R_1 + R_2)(R_1 + R_3) + L - CR_1^2) + (R_1 + R_3)};$$

$$I_{22}(p) = \frac{pC(R_1 + R_2)Li_3(0+) + Li_3(0+) + R_1Cu_C(0+)}{p^2LC(R_1 + R_2) + pC(R_1 + R_2)(R_1 + R_3) + L - CR_1^2) + (R_1 + R_3)}.$$

Подставив численные значения, получаем

$$I_{11}(p) = -\frac{672 \cdot 10^{-3} p + 3711 \cdot 10^3}{p^2 + 10,42 \cdot 10^3 p + 40,9 \cdot 10^6};$$

$$I_{22}(p) = \frac{0p + 2,483 \cdot 10^3}{p^2 + 10,42 \cdot 10^3 p + 40,9 \cdot 10^6}.$$

Ёмкость на операторной схеме замещения цепи изображается операторным сопротивлением и источником ЭДС, учитывающим ненулевые начальные условия. Поэтому выражение для операторного напряжения на ёмкости запишется в виде

$$U_C(p) = \frac{u_C(0+)}{p} + \frac{1}{pC} I_{11}(p).$$

После подстановки получаем

$$U_C(p) = \frac{84}{p} - \frac{622,2 \cdot 10^3 + 3,436 \cdot 10^9 p}{p(p^2 + 10,42 \cdot 10^3 p + 40,9 \cdot 10^6)}.$$

Для перехода от найденных операторных изображений токов и напряжений к оригиналам воспользуемся теоремой разложения

Для тока в индуктивности $i_3(t)$ записываем:

$$M(p) = 0p + 2,483 \cdot 10^3;$$

$$N(p) = p^2 + 10,42 \cdot 10^3 p + 40,9 \cdot 10^6;$$

$$N'(p) = 2p + 10,42 \cdot 10^3;$$

Определяем корни характеристического уравнения

$$p^2 + 10,42 \cdot 10^3 p + 40,9 \cdot 10^6 = 0$$

$$p_1 = -5208 + 3712j$$

$$p_1 = -5208 - 3712j$$

Коэффициенты при экспонентах в случае комплексно-сопряженных корней тоже будут комплексно-сопряженными, поэтому при суммировании мнимая часть будет равно нулю и ток $i_3(t)$ можно определить как удвоенное значение вещественной части первого или второго слагаемых

$$i_3(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{M(p_1)}{N'(p_1)} e^{p_1 t} \right].$$

После подстановки в последнее выражение численных значений получаем

$$i_3(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{0 \cdot (-5208 + 3712j) + 2,483 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot (-5208 + 3712j) + 10,42 \cdot 10^3} e^{(-5208 + 3712j)t} \right] =$$

$$= 0,669 e^{-5208 \cdot t} \sin(3712t) \text{ А.}$$

Определяем переходное напряжение на ёмкости, используя полученное раньше изображение $U_C(p)$ и свойство линейности преобразования Лапласа. Сумме изображений будет соответствовать сумма оригиналов

$$u_C(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

Вводим обозначения:

$$U_1(p) = \frac{84}{p};$$

$$U_2(p) = -\frac{622,2 \cdot 10^3 + 3,436 \cdot 10^9 p}{p(p^2 + 10,42 \cdot 10^3 p + 40,9 \cdot 10^6)}.$$

Изображению $U_1(p)$ в области оригиналов будет соответствовать константа $u_1(t) = 84$.

Определяем оригинал $u_2(t)$, используя теорему разложения. Характеристическое уравнение $N(p) = 0$ имеет три корня:

$$p_1 = 0;$$

$$p_2 = -5208 + 3712j;$$

$$p_3 = -5208 - 3712j.$$

Следовательно,

$$u_2(t) = - \left(\frac{M(p_1)}{N'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{M(p_2)}{N'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{M(p_3)}{N'(p_3)} e^{p_3 t} \right).$$

После подстановки численных значений получаем и выполнения всех преобразований получаем

$$u_2(t) = 97,638e^{-5208 \cdot t} \sin(3712t + 59,352^\circ) - 84 \text{ В.}$$

Складывая $u_1(t)$ и $u_2(t)$, находим полное переходное напряжение на ёмкости

$$u_C(t) = 97,638e^{-5208 \cdot t} \sin(3712t + 59,352^\circ) \text{ В.}$$

Графики переходных процессов по току в индуктивности $i_3(t)$ и по напряжению на емкости $u_C(t)$ представлены на рисунках 11 и 12 соответственно

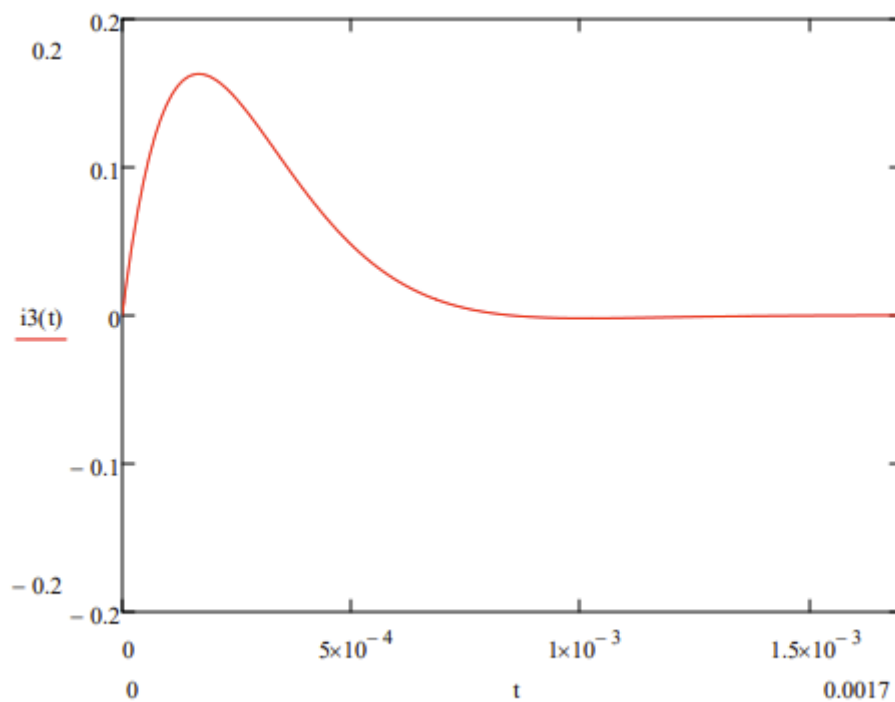


Рисунок 11

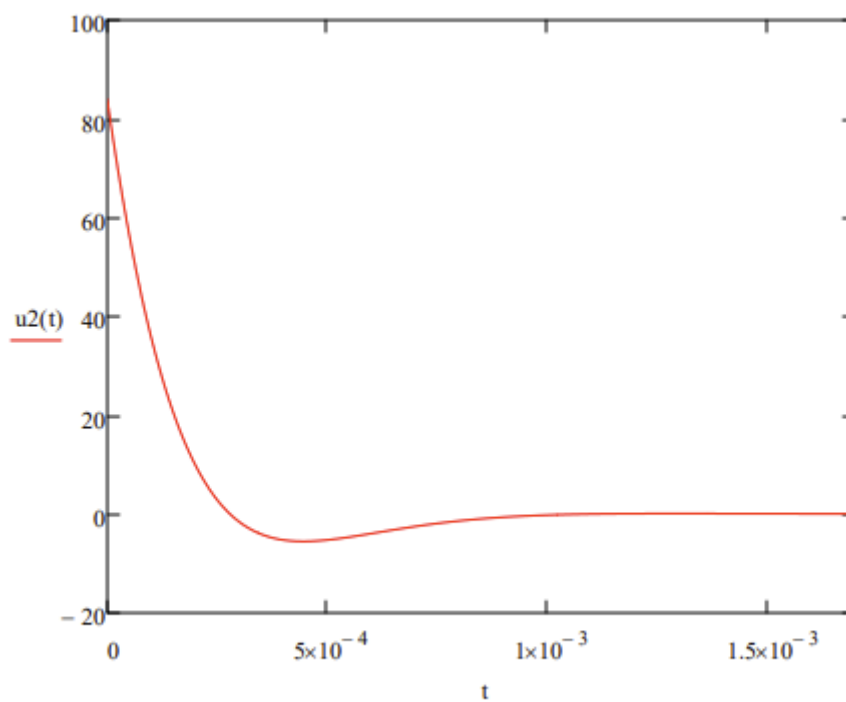


Рисунок 12