ТОЭ – часть 2
практическое занятие 6

Расчет переходных процессов в линейных цепях интегралом Дюамеля

Интеграл Дюамеля используется для расчета переходных процессов в линейных пассивных цепях с нулевыми начальными условиями при воздействии импульса произвольной формы источника электрической энергии

Задача 1

Дано:

$e(t)=100e^{-200t}$ **(В);**

$C=100$ **(мкФ);** $R=200$ **(Ом).**

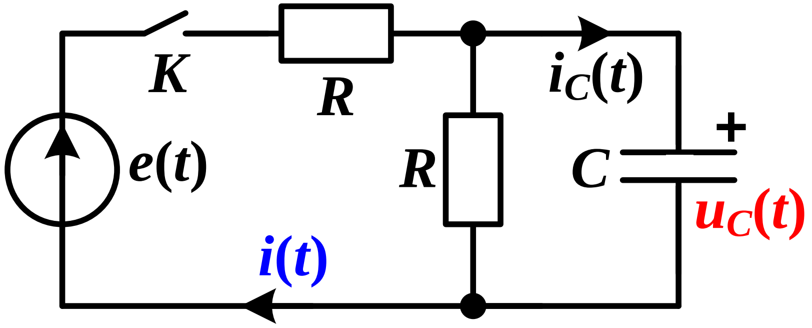
Определить:

$i(t)=?$ $u_C(t)=?$

Ключ ***К*** **замыкается**:

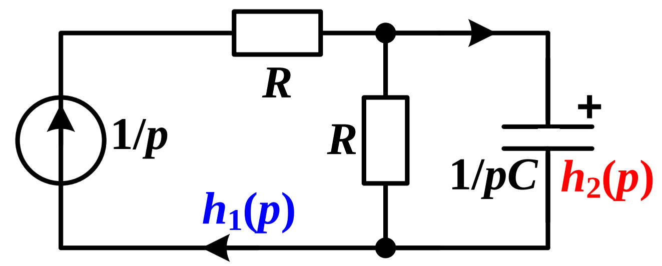
а) **до** коммутации ключ **разомкнут**;

б) **после** коммутации ключ **замкнут**.



1. Находим переходные характеристики $h_1(t)$, $h_2(t)$ для $i(t)$, $u_C(t)$ при нулевых начальных условиях:

$$u_C(0)=0.$$



Используем операторный метод и закон Ома:

а) ток

$$h_1(p)=(1/p)/[R+(R/pC)/(R+1/pC)]=$$

$$=(1+RCp)/[p(2R+R^2Cp)]=D_1(p)/B_1(p);$$

б) напряжение

$$h_2(p)=h_1(p)(R/pC)/(R+1/pC)=$$

$$=1/[p(2+RCp)]= D_2(p)/B_2(p).$$

По теореме разложения:

$$h_1(t)=\sum_{k=1}^{2}\frac{D_1(p_k)}{B_1^{/}(p_k)}e^{p_k t}=(1/2R)+(1/2R)e^{-2t/RC}=$$

$$=2,5\cdot 10^{-3}+2,5\cdot 10^{-3}e^{-100t}\,(1/\,\text{Ом})$$

- переходная проводимость;

$$h_2(t)=\sum_{k=1}^{2}\frac{D_2(p_k)}{B_2^{/}(p_k)}e^{p_k t}=0,5-0,5e^{-2t/RC}=$$

$$=0,5-0,5e^{-100t}$$

- безразмерная переходная функция.

2. Находим ток *i(t)* интегралом Дюамеля:

$$i(t) = e(0)h_1(t) + \int_0^t e'(\tau)h_1(t-\tau)d\tau;$$

$$e(0) = 100\ (\text{В});\ e'(\tau) = -2\cdot 10^4 e^{-200\tau}\ (\text{В/с});$$

$$h_1(t-\tau) = 2{,}5\cdot 10^{-3} + 2{,}5\cdot 10^{-3} e^{-100(t-\tau)}\ (1/\text{Ом}).$$

В результате:

$$i(t) = 0{,}25 + 0{,}25e^{-100t} + \int_0^t \left(-2\cdot 10^4 e^{-200\tau}\right)\left[2{,}5\cdot 10^{-3} + 2{,}5\cdot 10^{-3} e^{-100(t-\tau)}\right]d\tau =$$

$$= 0{,}25 + 0{,}25e^{-100t} - 50\int_0^t e^{-200\tau}d\tau - 50e^{-100t}\int_0^t e^{-100\tau}d\tau = 0{,}25 + 0{,}25e^{-100t} +$$

$$+0{,}25\left(e^{-200t} - 1\right) + 0{,}5e^{-100t}\left(e^{-100t} - 1\right) = -0{,}25e^{-100t} + 0{,}75e^{-200t}\ (\text{А}).$$

3. Находим напряжение $u_C(t)$ интегралом Дюамеля:

$$u_C(t) = e(0)h_2(t) + \int_0^t e'(\tau)h_2(t-\tau)d\tau;$$

$$e(0) = 100\ (\text{В});\ e'(\tau) = -2\cdot 10^4 e^{-200\tau}\ (\text{В/с});$$

$$h_2(t-\tau) = 0,5 - 0,5e^{-100(t-\tau)}\ .$$

В результате:

$$u_C(t) = 50 - 50e^{-100t} + \int_0^t \left(-2\cdot 10^4 e^{-200\tau}\right)\left[0,5 - 0,5e^{-100(t-\tau)}\right]d\tau =$$

$$= 50 - 50e^{-100t} - 10^4\int_0^t e^{-200\tau}d\tau + 10^4 e^{-100t}\int_0^t e^{-100\tau}d\tau = 50 - 50e^{-100t} +$$

$$+50\left(e^{-200t} - 1\right) - 100e^{-100t}\left(e^{-100t} - 1\right) = 50e^{-100t} - 50e^{-200t}\ (\text{В}).$$

4. Проверка: при $t=0$, когда L - разрыв, C - закоротка; при $t=\infty$, когда L - закоротка, C – разрыв.

$i(0)=-0{,}25+0{,}75=0{,}5$ (А) $=e(0)/R=100/200=0{,}5$ (А) – верно;

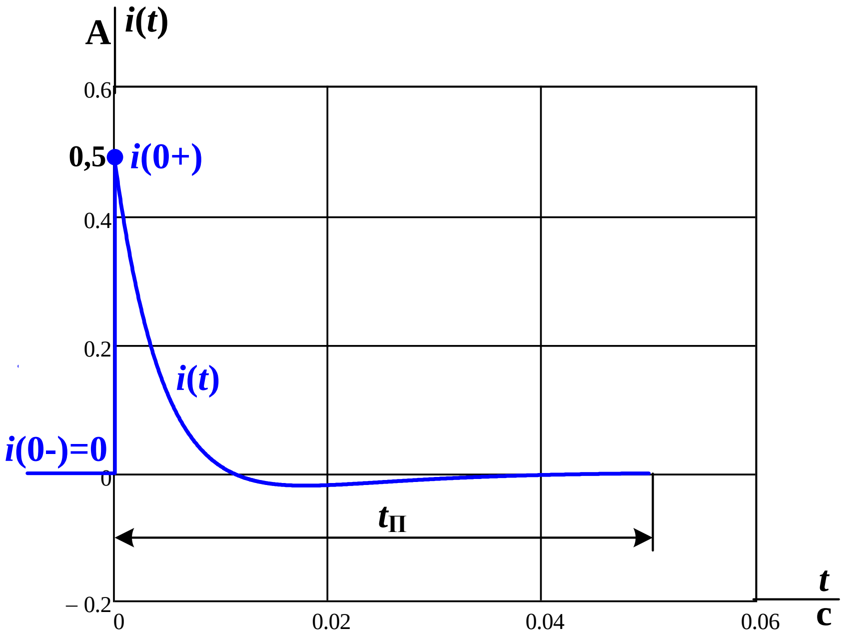
$u_C(0)=50-50=0$ – верно (нулевые начальные условия);

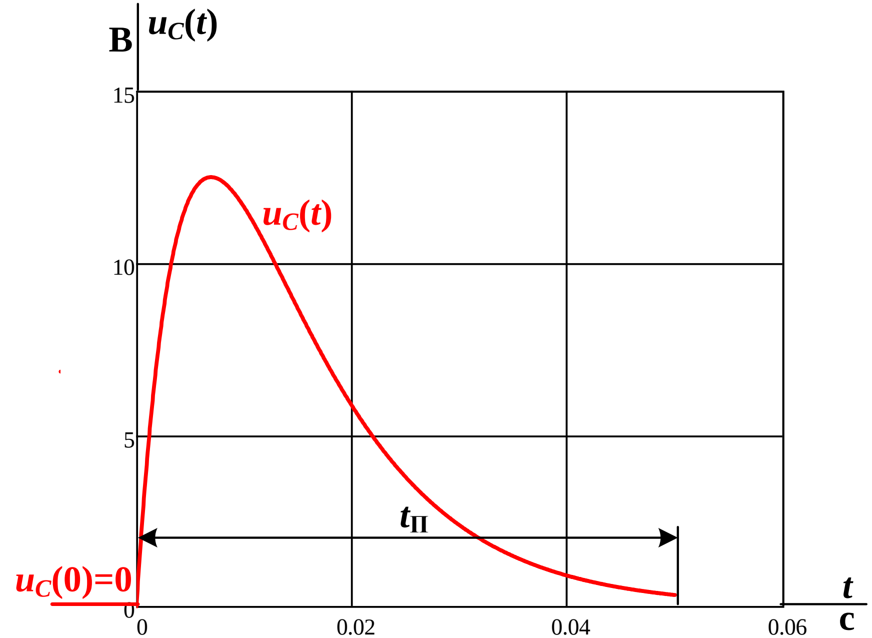
$i(\infty)=-0+0=0$ (А) $=e(\infty)/2R=0/400=0$ (А) – верно;

$u_C(\infty)=0-0=0$ (В) $=R\cdot i(\infty)=200\cdot 0=0$ (В) – верно.

5. Графики зависимостей $i(t)$, $u_C(t)$ при

$0 < t < t_П = 5/|p_{min}| = 0{,}05$ (с):





Задача 2

Дано:

$J(t)=1e^{-100t}$ (А);

$L=1$ (Гн); $R=200$ (Ом).

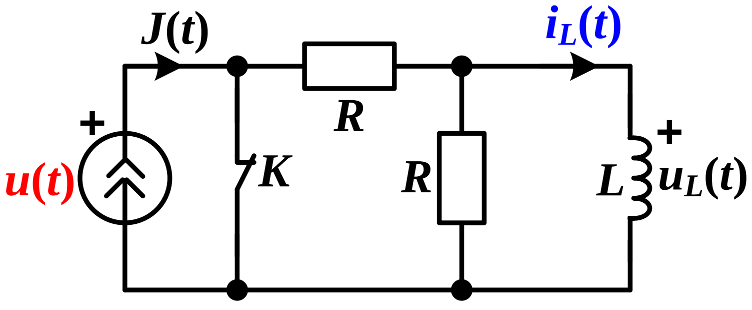
Определить:

$i_L(t)=?$ $u(t)=?$

Ключ *K* **размыкается**:

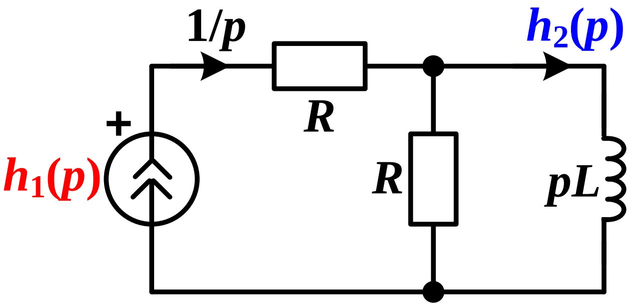
а) **до** коммутации ключ **замкнут**;

б) **после** коммутации ключ **разомкнут**.



1. Находим переходные характеристики $h_1(t)$, $h_2(t)$ для $u(t)$, $i_L(t)$ при нулевых условиях:

$$i_L(0)=0.$$



Используем операторный метод, закон Ома и правило разброса:

а) напряжение

$$h_1(p)=(1/p)[R+(RpL)/(R+pL)]=$$

$$=(R^2+2RLp)/[p(R+pL)]=D_1(p)/B_1(p);$$

б) ток

$$h_2(p)=(1/p)R/(R+pL)=$$

$$=R/[p(R+pL)]= D_2(p)/B_2(p).$$

По теореме разложения:

$$h_1(t)=\sum_{k=1}^{2}\frac{D_1(p_k)}{B_1'(p_k)}e^{p_k t}=R+Re^{-Rt/L}=$$

$$=200+200e^{-200t}\,(\text{Ом})$$

- переходное сопротивление;

$$h_2(t)=\sum_{k=1}^{2}\frac{D_2(p_k)}{B_2'(p_k)}e^{p_k t}=1-1e^{-Rt/L}=$$

$$=1-1e^{-200t}$$

- безразмерная переходная функция.

2. Находим напряжение $u(t)$ интегралом Дюамеля:

$$u(t)=J(0)h_1(t)+\int_0^t J'(\tau)h_1(t-\tau)d\tau;$$

$$J(0)=1\,(\mathrm{A});\; J'(\tau)=-100e^{-100\tau}\,(\mathrm{A/c});$$

$$h_1(t-\tau)=200+200e^{-200(t-\tau)}\,(\mathrm{Ом}).$$

В результате:

$$u(t)=200+200e^{-200t}+\int_0^t\left(-100e^{-100\tau}\right)\left[200+200e^{-200(t-\tau)}\right]d\tau=$$

$$=200+200e^{-200t}-2\cdot10^4\int_0^t e^{-100\tau}d\tau-2\cdot10^4e^{-200t}\int_0^t e^{100\tau}d\tau=200+200e^{-200t}+$$

$$+200\left(e^{-100t}-1\right)-200e^{-200t}\left(e^{100t}-1\right)=400e^{-200t}\;(\mathrm{B}).$$

3. Находим ток $i_L(t)$ интегралом Дюамеля:

$$i_L(t) = J(0)h_2(t) + \int_0^t J^{/}(\tau)h_2(t-\tau)d\tau;$$

$$J(0) = 1\,(\text{А});\; J^{/}(\tau) = -100e^{-100\tau}\,(\text{А/с});$$

$$h_2(t-\tau) = 1 - 1e^{-200(t-\tau)}\,.$$

В результате:

$$i(t) = 1 - 1e^{-200t} + \int_0^t \left(-100e^{-100\tau}\right)\left[1 - 1e^{-200(t-\tau)}\right]d\tau =$$

$$= 1 - 1e^{-200t} - 100\int_0^t e^{-100\tau}d\tau + 100e^{-200t}\int_0^t e^{100\tau}d\tau = 1 - 1e^{-200t} +$$

$$+\left(e^{-100t} - 1\right) + e^{-200t}\left(e^{100t} - 1\right) = 2e^{-100t} - 2e^{-200t}\;(\text{А}).$$

4. Проверка: при $\boldsymbol{t=0}$, когда $\boldsymbol{L}$ - разрыв, $\boldsymbol{C}$ - закоротка; при $\boldsymbol{t=\infty}$, когда $\boldsymbol{L}$ - закоротка, $\boldsymbol{C}$ – разрыв.

$u(0)=400$ (В)$=J(0)\cdot 2R=1\cdot 400=400$ (В) – верно;

$i_L(0)=2\text{-}2=0$ – верно (нулевые начальные условия);

$u\,(\infty)=0$ (В)$=J(\infty)\cdot R=0\cdot 200=0$ (В) – верно;

$i_L(\infty)=0-0=0$ (А)$=J(\infty)=0$ (А) – верно.