

Тема 8. Моделирование эргатических систем

8.1. Множественность моделей эргатических систем.

В настоящее время для исследования систем разработано огромное количество различных видов моделей. Для исследования новых систем, решения конкретной задачи, необходимо выбрать именно свой тип или вид модели. От этого зависит эффективность решения возникшей проблемы. Осуществить правильный выбор модели для исследования конкретной системы, оказывает их классификация. Классификация моделей и видов моделирования и систем в соответствии с теорией подобия должна выделить в них наиболее общие признаки и свойства реальных систем. Все модели и методы моделирования с определенной условностью могут быть разделены на следующие наиболее общие классы: материальные (реально существующие) и идеальные (мысленно воображаемые). Примерами материальных моделей служат лабораторные установки, макеты автомашин, манекенщицы, а идеальных – описание или представление любых явлений, процессов и предметов с помощью графических и математических символов и даже слов.

В соответствии с двумя видами задач (экспертной и конструктивной) существует два вида моделей: 1) Познавательная модель - форма организации и представления знаний, средство соединения новых и старых знаний. Познавательная модель, как правило, подгоняется под реальность и является теоретической моделью.

2) Прагматическая модель - средство организации практических действий, рабочего представления целей системы для ее управления. Реальность в них подгоняется под некоторую прагматическую модель. Это, как правило, прикладные модели.

Существует еще и третий вид моделей - инструментальная модель - средство построения, исследования и/или использования прагматических и/или познавательных моделей.

Познавательные отражают существующие, а прагматические - хоть и не существующие, но желаемые и, возможно, исполнимые отношения и связи.

По уровню, "глубине" моделирования модели бывают:

- эмпирические - на основе эмпирических фактов, зависимостей;
- теоретические - на основе математических описаний;
- смешанные, полуэмпирические - на основе эмпирических зависимостей и математических описаний.

В процессе построения модели различают три вида или стадии построения моделей: мысленная модель, концептуальная модель и формальная модель.

При наблюдении за объектом в голове исследователя формируется мысленный образ объекта, его идеальная модель. Формируя такую модель, разработчик, как правило, стремится ответить на конкретные вопросы. От реального очень сложного устройства объекта отсекается все ненужное

с целью получения его более компактного и лаконичного описания. Представление мысленной модели на естественном языке называется содержательной моделью.

По функциональному признаку и целям содержательные модели делятся на описательные, объяснительные и прогностические. Описательной моделью называется любое описание объекта. Объяснительная модель позволяет ответить на вопрос: почему это происходит? Прогностическая модель описывает будущее поведение объекта.

Концептуальная (содержательная) модель - это абстрактная модель, определяющая структуру моделируемой системы, свойства ее элементов и причинно-следственные связи, присущие системе и существенные для достижения цели моделирования. Иными словами, это содержательная модель, при формулировании которой используются понятия и представления предметных областей, связанных с моделью. Например, математическая модель формулируется на языке математики – с помощью математических зависимостей, формул, пространственных форм и т.п.

Выделяют три вида концептуальных моделей: логико-семантические, структурно-функциональные и причинно-следственные.

Логико-семантическая модель – описание объекта в терминах соответствующих предметных областей знаний. Анализ таких моделей осуществляется средствами логики с привлечением специальных знаний.

При построении структурно-функциональной модели объект рассматривается как целостная система, которую расчленяют на отдельные подсистемы или элементы. Части системы связывают структурными отношениями, описывающими подчиненность, логическую и временную последовательность решения задач.

Причинно-следственная модель служит для объяснения и прогнозирования поведения объекта. Такие модели ориентированы на следующие моменты: 1) выявление главных взаимосвязей между подсистемами; 2) выявление определенного влияния различных факторов на состояние объекта; 3) описание динамики интересующих разработчика параметров.

Формальная модель является представлением концептуальной модели с помощью формальных языков. К таким языкам относятся математический аппарат, алгоритмические языки, языки моделирования.

Построение концептуальной модели включает следующие этапы:

- 1) определение типа системы;
- 2) описание внешних воздействий;
- 3) декомпозиция системы.

На первом этапе осуществляется сбор фактических данных (на основе работы с литературой и технической документацией, проведения натурных экспериментов, сбора экспертной информации и т. д.), а также выдвижение гипотез относительно значений параметров и переменных, для которых отсутствует возможность получения фактических данных. Если полученные результаты соответствуют принципам информационной достаточности и осуществимости, то они могут служить основой для отнесения моделируемой системы к одному из известных типов (классов).

Одним из классификационных признаков моделируемой системы является мощность множества состояний моделируемой системы. По этому признаку системы делят на статические и динамические. Система называется статической, если множество ее состояний содержит один элемент. Пример. Закон Ньютона $F=am$ - это статическая модель движущейся с ускорением a материальной точки массой m . Эта модель не учитывает изменение ускорения от одной точки к другой.

Если состояний больше одного, или они могут изменяться во времени, система называется динамической. Процесс смены состояний называется движением системы. Пример. Модель $S=gt^2/2$ - динамическая модель пути при свободном падении тела.

Различают два основных типа динамических систем:

- с дискретными состояниями (множество состояний конечно или счетно);
- с непрерывным множеством состояний.

Системы с дискретными состояниями характеризуются тем, что в любой момент времени можно однозначно определить, в каком именно состоянии находится система. Для такой идентификации обязательно нужно знать тот признак, который отличает одно состояние системы от другого. Например, при исследовании систем массового обслуживания в качестве такого признака обычно используют число заявок в системе. Соответственно, изменение числа заявок в системе интерпретируется как переход системы в новое состояние. Если же не удастся подобрать такой признак, либо его текущее значение невозможно зафиксировать, то систему относят к классу систем с непрерывным множеством состояний. Смена состояний может происходить либо в фиксированные моменты времени, множество которых дискретно (например, поступление новых заявок на обслуживание), либо непрерывно (изменение температуры тела при нагревании). В соответствии с этим различают системы с дискретным временем переходов (смены состояний) и системы с непрерывным временем переходов (точнее, «живущие» в непрерывном времени).

По условиям перехода из одного состояния в другое различают детерминированные системы и стохастические. В детерминированных системах новое состояние зависит только от времени и текущего состояния системы. Другими словами, если имеются условия, определяющие переход системы в новое состояние, то для детерминированной системы можно однозначно указать, в какое именно состояние она перейдет. Для стохастической системы можно указать лишь множество возможных состояний перехода и, в некоторых случаях, - вероятностные характеристики перехода в каждое из этих состояний.

Классификация систем важна, как на этапе разработки модели, она позволяет уточнить цель и задачи моделирования, облегчает переход к этапу формализации модели, так и на этапе оценки качества разработанной модели, знание классификационных признаков дает возможность оценить степень ее соответствия поставленной цели.

Работа не с самой системой, а с ее моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать ее свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях.

Необходимо отметить, что в настоящее время практически во всех областях исследования различных систем применяется математическое моделирование. Поэтому учитывая большое разнообразие математических моделей авторы работы приводят следующую классификацию математических моделей.

Математические модели классифицируются:

- по принадлежности к иерархическому уровню;
- характеру отображаемых свойств объекта;
- способу представления свойств объекта;
- способу получения модели;
- форме представления свойств объекта.

8.2. Сложности выявления целей.

Начнем с рассмотрения искусственных, т.е. создаваемых человеком систем. Как уже отмечалось, любая деятельность человека носит целенаправленный характер. Наиболее четко это прослеживается на примере трудовой деятельности. Цели, которые ставит перед собой человек, редко достижимы только за счет его собственных возможностей или внешних средств, имеющихся у него в данный момент. Такое стечение обстоятельств называется «проблемной ситуацией». Проблемность существующего положения осознается в несколько «стадий»: от смутного ощущения что «что-то не так», к осознанию потребности, затем к выявлению проблемы и, наконец, к формулировке цели.

Цель – это субъективный образ (абстрактная модель) несуществующего, но желаемого состояния среды, которое решило бы возникшую проблему. Вся последующая деятельность, способствующая решению этой проблемы, направлена на достижение поставленной цели, т.е. как работа по созданию системы. Другими словами: *система есть средство достижения цели.*

Приведем несколько упрощенных примеров систем, предназначенных для реализации определенных целей.

№	Цель	Система
1	В произвольный момент указать время	Часы
2	Обеспечить выпечку хлеба в заданном ассортименте для большого количества людей	Пекарня
3	Передать зрительную и звуковую информацию на большое расстояние практически мгновенно	Телевидение
4	Обеспечить перемещение людей в городе	Городской транспорт

Отметим, что далеко не просто сформулировать цели так, чтобы имелось действительно очевидное соответствие между целями и системами. Например, только слова "практически мгновенно" в примере 3 отличает цель телевидения от цели кино или пересылки видеокассет. В то же время, между целью (абстрактной и конечной моделью) и реальной системой нет, и не может быть однозначного соответствия: для достижения заданной цели могут быть избраны разные средства – системы. С другой стороны, заданную реальную систему можно использовать и для других целей, прямо не предусмотренных при ее создании.

В инженерной практике момент формулирования цели – один из важнейших этапов создания систем. Обычно цели уточняются итеративно, с многократными изменениями и дополнениями.

Цели моделирования:

- 1) изучение и прогнозирование (моделировании) поведения сложных процессов и явлений. Следует отметить, что некоторые объекты и явления вообще не могут быть изучены непосредственным образом (на основе эксперимента). Многие эксперименты просто невозможны, другие слишком дороги и рискованны для человека и/или среды его обитания;
- 2) проведение любых сложных экспериментов. Более того эксперименты на моделях с применением ЭВМ позволяют разработать план натуральных экспериментов, выяснить требуемые характеристики измерительной аппаратуры, наметить сроки проведения наблюдений, а также оценить стоимость такого эксперимента;
- 3) выявление наиболее существенных факторов, формирующих тех или иных свойств объекта, поскольку сама модель отражает лишь некоторые основные характеристики исходного объекта, учет которых необходим при исследовании того или иного процесса или явления;
- 4) научиться правильно управлять объектом путем апробирования различных вариантов управления. Модель (моделирование) позволяет «играть» с ней: включать, или отключать те или иные связи, менять их для того, чтобы понять важность для поведения системы в целом;

8.3. Субъективные и объективные цели.

Эргономическое проектирование рабочих пространств и рабочих мест производится с учетом антропологических, биомеханических, психофизиологических и психических возможностей работников. Решаются задачи размещения работающего человека с учётом зоны его рабочих движений, выполнения основных и вспомогательных операций в удобном рабочем положении, с применением эффективных приёмов и способов выполнения трудовых операций, оптимального обзора средств визуального и звукового представления информации. Обеспечивается свободный доступ к оборудованию для его профилактического осмотра и ремонта. Решаются задачи обеспечения требований санитарной гигиены, техники безопасного проведения работ.

Множество действующих на оператора факторов определяют эффективность его труда. Выделяют субъективные — зависящие от оператора и объективные — внешние по отношению к оператору факторы, влияющие на эффективность операторской деятельности.

К субъективным факторам относят: психологическое состояние оператора, уровень подготовленности к данному виду операторской деятельности и т.д.

Объективные факторы, в свою очередь, делятся на аппаратурные, зависящие от функционирования техники, и средовые, зависящие от рабочей среды, в которой действует оператор.

Аппаратурные факторы определяются организацией рабочего места оператора, формой и видом предъявления потока рабочей информации, особенностями систем, контролирующих выполнение деятельности.

Средовые факторы определяются условиями обитаемости, обстановкой, организацией деятельности (режимы труда и отдыха, количество рабочих смен, взаимозаменяемость операторов).

В соответствии с тем, какие задачи ставятся при моделировании эргатических систем и какие факторы являются в поставленных целях определяющими, цели соответственно будут объективными или субъективными.

8.4. Модель структуры эргатической системы.

Основой для моделирования эргатических систем является применение системного подхода. Сущность системного подхода достаточно проста: все элементы системы и все операции в ней должны рассматриваться только как одно целое, только в совокупности, только во взаимосвязи друг с другом.

Идеи системного подхода определяют многие исходные установки и теоретические положения моделирования и проектирования систем: стремление к целостному рассмотрению человеко-машинных систем, системно-динамический взгляд на их структуру, включение деятельности человека в предмет научного рассмотрения, тенденция к научному синтезу различных аспектов исследования, стремление выявить возможные последствия деятельности человека. Применение системного подхода к эргатическим системам позволяет выявить различные характеристики связи человека и машины в конкретных условиях их взаимодействия.

При построении структурно-функциональной модели объект обычно рассматривается как целостная система, которую расчленяют на отдельные элементы и подсистемы. Части системы связываются структурными отношениями, описывающими подчиненность, логическую и временную последовательность решения отдельных задач. Для представления этих моделей удобны различного рода схемы, карты, диаграммы и т.п. На рис. 8.1. представлен общий вид структурной схемы эргатической системы.

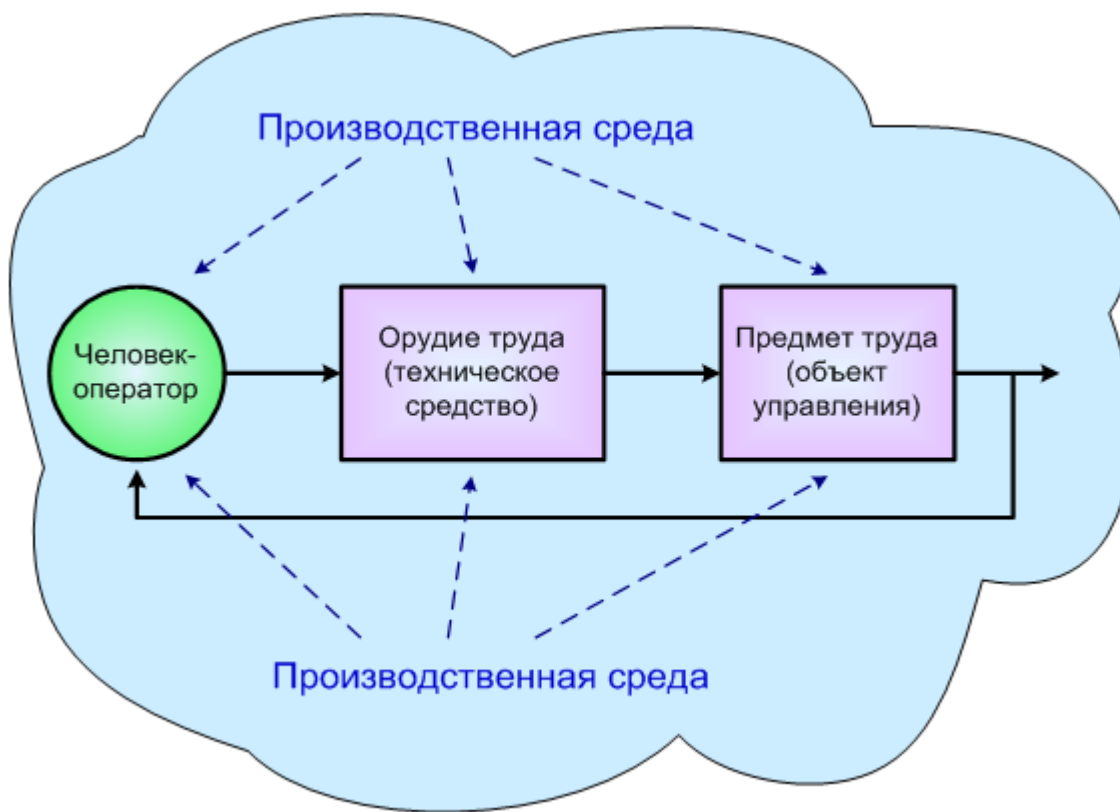


Рис. 8.1. Общий вид структурной модели эргатической системы.

Модель, целью, которой является установления связей между частями системы, т.е. определении

структуры системы, является моделью структуры. Модель структурная, если она представима структурой данных или структурами данных и отношениями между ними. На рис. 8.2 графически представлена модель структуры. Для описания структуры деятельности человека-оператора в эргономике применяется целый ряд методов. Наиболее известным способом регистрации производственного процесса на рабочем месте является хронометраж, позволяющий фиксировать последовательность и продолжительность отдельных действий, составляющих совокупную изучаемую операцию.

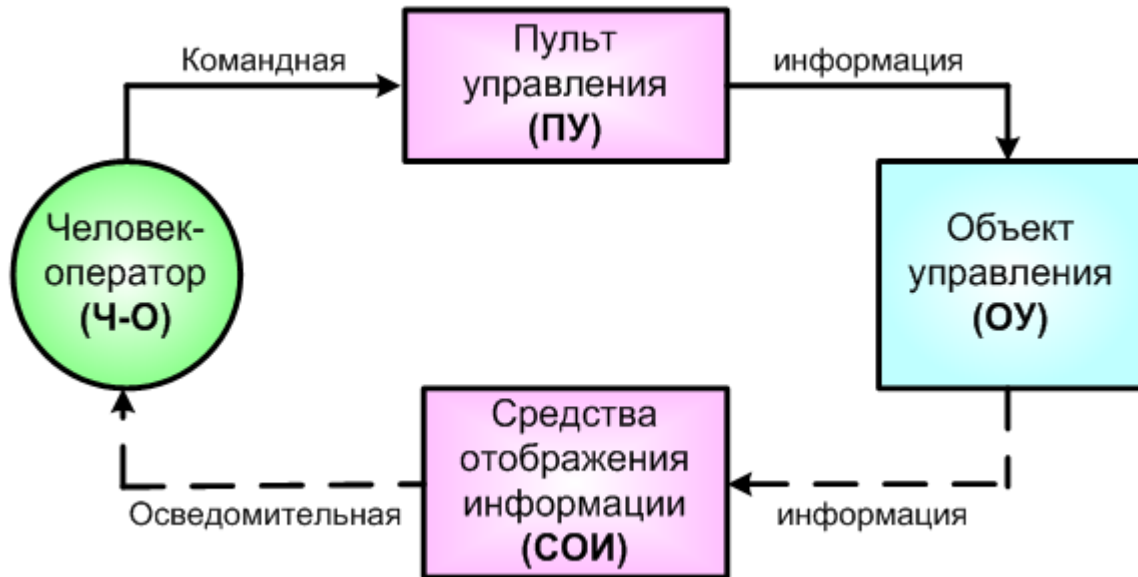


Рис. 8.2. Структурная модель эргатической системы.

8.5. Сущность и основные преимущества математического моделирования систем.

Математическая модель — описание системы, выраженное с помощью математической символики (математических зависимостей, соотношений, уравнений, неравенств и т. п.), содержащая информацию о свойствах и характеристиках моделируемой системы, существенных для решения поставленной цели. В настоящее время невозможно представить себе современную науку без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его «образом» — математической моделью — и дальнейшем исследовании разработанной модели с помощью вычислительно-логических алгоритмов. Этот метод исследования, разработки и создания систем сочетает в себе многие достоинства, как теории, так и эксперимента. Работа не с самой системой, а с ее моделью дает возможность быстро и без существенных затрат исследовать ее свойства и поведение в любых ситуациях. Вычислительные (компьютерные, имитационные) эксперименты с моделями разнообразных систем позволяют, с помощью современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, подробно и глубоко изучать системы в различных областях исследований. Методология математического моделирования бурно развивается, охватывая все новые сферы - от разработки технических систем и управления ими до анализа сложнейших природных экономических и социальных процессов. Однако информация, как таковая, зачастую мало что дает для анализа, прогноза, принятия решений и контроля за их исполнением. Нужны надежные способы переработки исходной информации в готовый результат, т.е. в точное знание.

Преимущества математического моделирования систем заключаются в следующем:

Компактность. Словесное (или вербальное) описание системы, как правило, включает множество нечетких высказываний, что усложняет постановку и решение задач. Устранить этот

недостаток вербального описания помогает компактная математическая символика. Математическое описание дает нам аналог исследуемой системы и оказывается информативнее любого словесного описания.

Ясность. Использование математического описания позволяет каждому аспекту изучаемого процесса поставить в соответствие определенный математический символ, в результате чего становится нагляднее взаимосвязь, существующая между различными параметрами процесса. Более того, подобное сопоставление позволяет гораздо проще, чем словесное описание, установить, не были ли упущены какие-либо существенные переменные, или, напротив, не были ли внесены какие-либо дополнительные несущественные сложности при построении описания.

Возможность численного анализа. Математическим описанием можно манипулировать в соответствии с обычными законами логики с целью получить нетривиальное представление о самой системе. Кроме того, математическая модель дает основу для численного анализа, с помощью которого могут быть получены данные не только описательного, но и прогностического характера.

Экономичность. Замена натурального эксперимента математическим описанием позволяет сберегать ресурсы реальной системыю.

Доступность. Возможность моделирования гипотетических, т.е. не реализованных в природе объектов (прежде всего на разных этапах проектирования), а так же возможность реализации режимов, опасных или труднопроизводимых в натуре (критический режим ядерного реактора, работа системы притиворакетной обороны), возможность изменения масштаба времени.

Простота анализа. Возможность анализа результатов исследования с помощью информационных технологий (ЭВМ, системы программирования и пакеты прикладных программ широкого назначения).

Предсказательность. Большая прогностическая сила вследствие возможности выявления общих закономерностей.

8.6. Обобщенная математическая модель и основные принципы построения математических моделей

В общем случае математическая модель реальной системы представляется в виде системы функционалов

$$\Phi_i(X, Y, Z, W, T) = \text{const}, \quad (8.1)$$

где $X(X_1, \dots, X_k)$ – группа управляемых (входных переменных) факторов, которыми исследователь может управлять в процессе подготовки и проведения эксперимента;

$Z(Z_1, \dots, Z_r)$ – неуправляемые факторы (внешних воздействий), которыми исследователь управлять не может, но может их измерять;

$W(W_1, \dots, W_q)$ – неконтролируемые факторы (внешних воздействий), которые объективно существуют и влияют на процесс, но не известны исследователю;

$\hat{Y}(\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_p)$ – множество выходных функций (выходных переменных), представляет собой совокупность критериальных функций;

T - координата времени.

Схема обобщенной математической модели представлена на (рис. 8. 1).

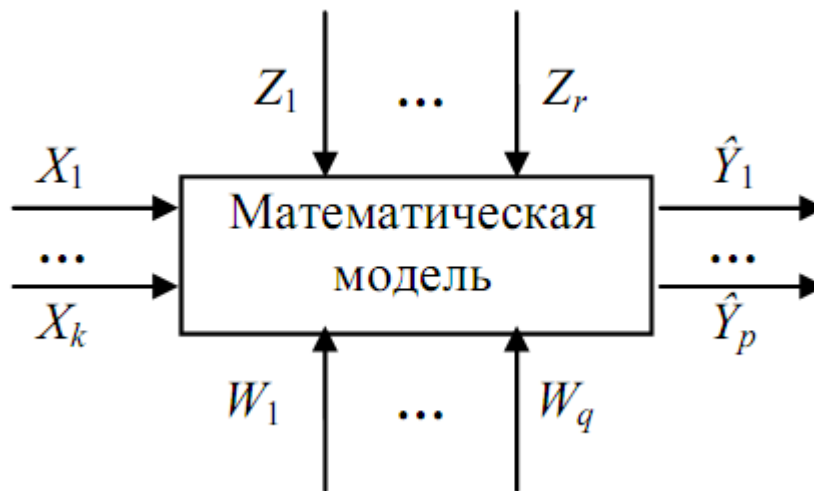


Рис. 8. 3. Схема обобщенной математической модели критерия качества.

Формальное описание модели системы. В общем случае параметры, описывающие состояние и поведение объекта моделирования разбиваются на ряд непересекающихся множеств:

- Ω_X – совокупность входных (управляемых) воздействий на объект;
- Ω_W – совокупность воздействий внешней среды;
- Ω_Z – совокупность внутренних (собственных) параметров объекта;
- Ω_Y – совокупность выходных характеристик

Тогда определение математической модели $A : X \rightarrow Y$, $X \in \Omega_X$, $Y \in \Omega_Y$ представляется следующим образом $A : \{X, W, Z\} \rightarrow Y$

В этой модели X - входные параметры, параметры W описывающие воздействие внешней среды, и внутренние (собственные) характеристики Z относят обычно к независимым (экзогенным) величинам. Выходные параметры Y - зависимые (эндогенные) величины.

При изучении сложных объектов приходится учитывать большое число взаимосвязанных факторов, при этом реально доступная информация может иметь любую степень детерминированности, быть плохо формализуемой, поступать в произвольной форме и эволюционировать во времени. При математическом моделировании факторы отображаются в виде математических конструкций - таких, как параметры состояния объекта и среды, ограничения на область совместного и согласованного изменения этих параметров и т.д. Многие факторы при этом могут оказаться плохо формализуемыми, т.е. их отражение математическими конструкциями оказывается либо невозможным, либо просто плохим. Поэтому плохо формализуемыми являются аморфные, слабо структурированные явления. Причинами плохой формализуемости может служить сложность объекта, недостаток знаний о нём, наличие интуитивно оцениваемых показателей и т.д. Часто построение модели начинают с «инвентаризации» всех имеющихся сведений об объекте моделирования, например, составления

списка переменных и связывающих их ограничений, идентификации определяющих переменных, выбор вида модели и т.д. Любой объект может быть описан многими способами, исходные данные о нём известны приближённо. Поэтому модели объекта должны соответствовать уровню знаний о нём, возможностям использования и достижения целей моделирования. Описание объекта начинают с описания его состояния в данный момент времени. Это состояние называют фазовым состоянием, а численные значения параметров модели, соответствующие этому состоянию, - фазовыми координатами. Например, фазовое состояние материальной точки определяется её координатами и величинами скоростей. Изменение состояния объекта под действием внешних сил или внутренних процессов сопровождается изменением фазовых координат. Связь между изменением состояния объекта и действием внешних сил проявляется в законах сохранения, которые служат основой любого модельного описания объекта. К числу таких законов относятся известные физические законы сохранения вещества, энергии, количества движения и т.д. и математические, связанные с геометрическими или алгебраическими отношениями и свойствами математических объектов.

Рассмотрим основные принципы моделирования, отражающие опыт, накопленный к настоящему времени в области разработки и использования математической моделей.

1. Принцип информационной достаточности. При полном отсутствии информации об исследуемой системе построение ее модели невозможно. При наличии полной информации о системе ее моделирование лишено смысла. Существует некоторый критический уровень априорных сведений о системе (уровень информационной достаточности), при достижении которого может быть построена ее адекватная модель.

2. Принцип осуществимости. Создаваемая модель должна обеспечивать достижение поставленной цели исследования с вероятностью, существенно отличающейся от нуля, и за конечное время.

3. Принцип множественности моделей. Данный принцип является ключевым. Речь идет о том, что создаваемая модель должна отражать в первую очередь те свойства реальной системы (или явления), которые влияют на выбранный показатель эффективности. Соответственно при использовании любой конкретной модели познаются лишь некоторые стороны реальности. Для более полного ее исследования необходим ряд моделей, позволяющих с разных сторон и с разной степенью детальности отражать рассматриваемый процесс.

4. Принцип агрегирования. В большинстве случаев сложную систему можно представить состоящей из агрегатов (подсистем), для адекватного математического описания которых оказываются пригодными некоторые стандартные математические схемы. Принцип агрегирования позволяет, кроме того, достаточно гибко перестраивать модель в зависимости от задач исследования.

5. Принцип параметризации. В ряде случаев моделируемая система имеет в своем составе некоторые относительно изолированные подсистемы, характеризующиеся определенным параметром, в том числе векторным. Такие подсистемы можно заменять в модели соответствующими числовыми величинами, а не описывать процесс их функционирования. При необходимости зависимость значений этих величин от ситуации может задаваться в виде таблицы, графика или аналитического выражения (формулы). Принцип параметризации позволяет сократить объем и продолжительность моделирования. Однако надо иметь в виду, что параметризация снижает адекватность модели.

Степень реализации перечисленных принципов и каждой конкретной модели может быть различной, причем это зависит не только от желания разработчика, но и от соблюдения им технологии моделирования. А любая технология предполагает наличие определенной

последовательности действий.

8. 7. Разновидности математического моделирования

Моделирование на основе эксперимента. Моделирование на основе эксперимента происходит при попытке выявления зависимостей результатов экспериментальных исследований от наиболее существенных факторов исследуемой проблемы. Это позволяет обобщить результат исследований в виде некоторых математических зависимостей. Например, для свободно падающих тел Галилеем был установлен факт независимости динамики свободного падения тел в вакууме вблизи поверхности земли от их массы, плотности, размеров. Это обстоятельство может быть проверено путем измерения зависимости скорости свободного падения от времени для контрольной группы тел. Если нанести результаты измерений на график (t, V) , то через совокупность экспериментальных точек с учетом погрешностей измерений для каждого тела легко может быть проведена прямая (см. рис. 8.4), что позволяет выполнить аппроксимацию по формуле (уравнение прямой):

(8.2)

С помощью статистической обработки с некоторой погрешностью может быть найден тангенс угла наклона данной прямой, то есть величина g , являющаяся по смыслу ускорением свободного падения. Сопоставление величины ускорения для разных тел позволяет повторить вывод Галилея. Таким образом, мы устанавливаем некоторый «закон», выражаемый формулой (8.2).

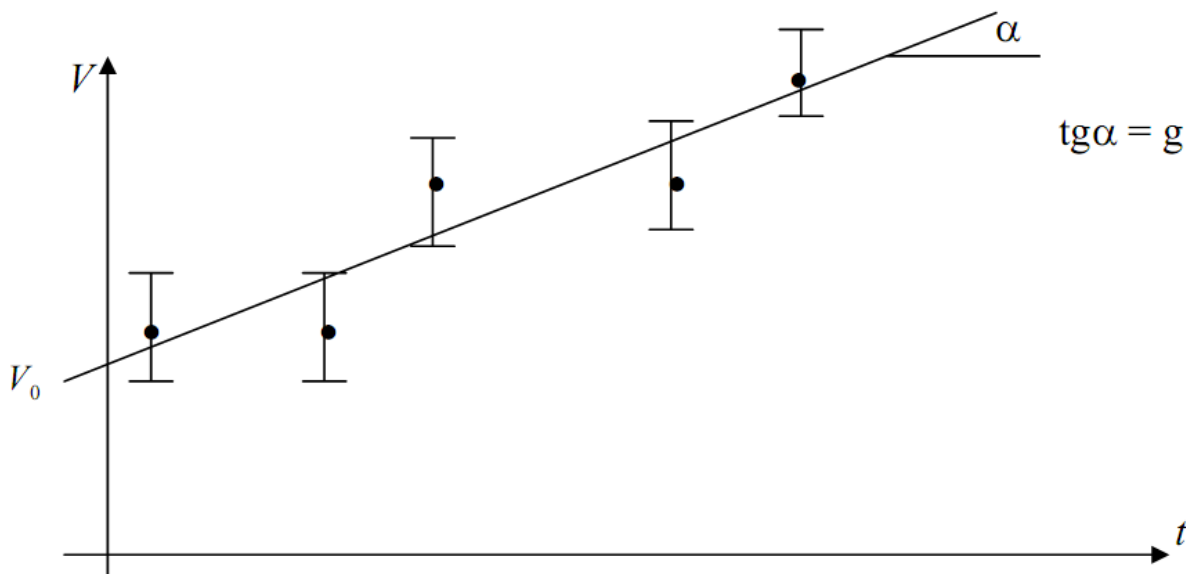


Рис.8.4. Зависимость скорости V от времени падения t

Заметим принципиальный момент: нам так и осталась непонятной природа этого явления, но, имея формулу (8.2), мы обладаем инструментом прогнозирования. Здесь мы сталкиваемся с широко известной информационной технологией «черного ящика», получившей широкое распространение в кибернетике. «Черный ящик», соответствующий формуле (8.2), схематично можно изобразить так, как это показано на рис. 8.5

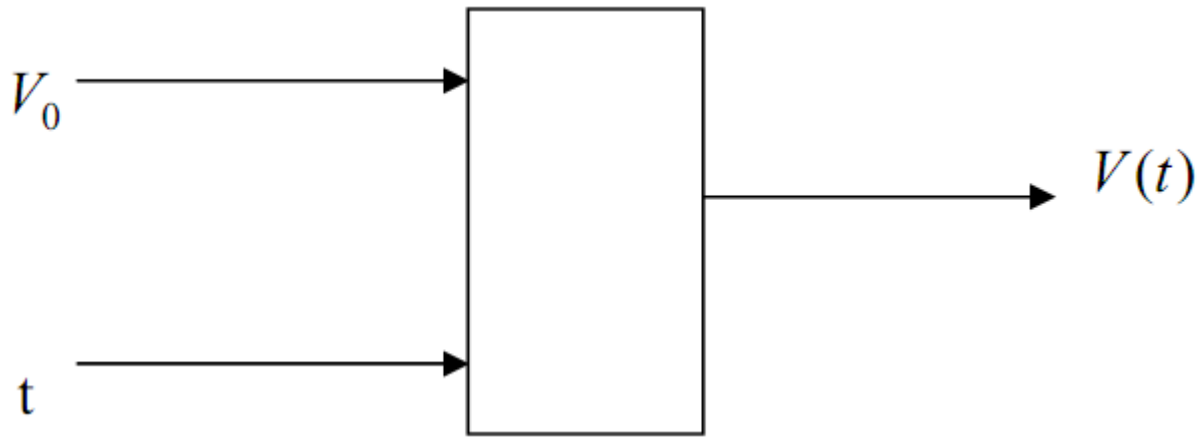


Рис. 8.5. Модель «черный ящик»

Физическое моделирование. Физическое моделирование (натурное моделирование, макетирование) состоит в замене изучения некоторого объекта или явления его эквивалентным аналогом, имеющим схожую физическую природу. Например, рассмотрим движение математического маятника, описываемое вторым законом Ньютона, и колебания в линейном LC-контуре (см. рис. 8.6).

Движение математического маятника в проекции на направление скорости груза V описывается уравнением:

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = m \cdot g \cdot \sin \varphi, \quad (8.3)$$

где m – масса маятника; g – ускорение свободного падения; φ – угол отклонения

маятника. Добавим к нему почти очевидное кинематическое соотношение, с учетом знаков выбранных переменных состояния:

$$V = -l \cdot \omega = -l \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad (8.4)$$

где l – длина подвеса; ω – угловая скорость груза относительно точки подвеса.

Дифференцируя кинематическое соотношение с целью исключения производной

от скорости из записанной пары уравнений, получаем математическую модель

маятника:

$$-l \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = g \cdot \sin \varphi \quad (8.5)$$

Рассматривая малые колебания, для которых $\sin\varphi \approx \varphi$, получим:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0 \quad (8.6)$$

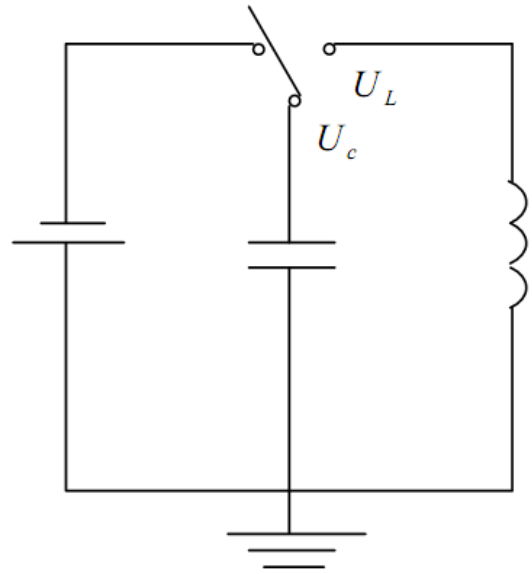
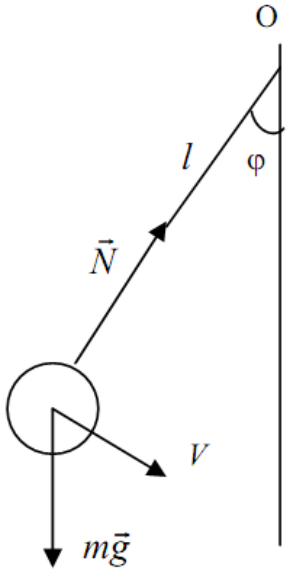


Рис. 8.6. Пример физического моделирования

С другой стороны колебания в LC-контуре после переключения ключа и разрядки конденсатора на индуктивность можно описать, учитывая, что сумма токов через конденсатор и индуктивность равна нулю. Это позволяет воспользоваться уравнением, где производная от тока через индуктивность взята с целью использовать в дальнейшем закон Фарадея:

$$\frac{d}{dt} I_C + \frac{d}{dt} I_L = 0 \quad (8.7)$$

Поскольку

$$I_C = \frac{dq_C}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}$$

, где C – емкость конденсатора; q – заряд конденсатора; U – напряжение на конденсаторе; выражение 8.7 принимает вид:

$$C \cdot \frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{U_C}{L} = 0 \quad (8.8)$$

Или с учетом $L_C = U_C$:

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot U_C = 0 \quad (8.9)$$

Видно, что в обоих случаях фактически мы имеем одну и ту же математическую модель колебаний. Обобщив (8.6) и (8.9), получим:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \quad (8.10)$$

где

$$\begin{array}{l} x \Leftrightarrow \varphi \\ \Updownarrow \\ U_C \end{array} \quad \text{и} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}. \quad (8.11)$$

Таким образом, с математической (описательной) точки зрения колебания в линейном LC контуре полностью эквивалентны колебаниям математического маятника при малых отклонениях от положения равновесия. Вместо изучения колебаний в одной системе можно исследовать колебания на примере (макете) другой системы. Аналогичные примеры моделирования широко известны в областях авиастроения, кораблестроения, при проектировании плотин и архитектурных сооружений, ракетостроении, при испытании вооружений и т.п. Главная причина применения такого моделирования – в сокращении затрат по изготовлению и отладке производства изделий. Сокращение достигается в трудозатратах, затратах ресурсов, затратах времени. По существу по этому пути идут также все технологии, развивающие модельные ряды и ряды прототипов. Это автомобилестроение, химия, металлургия, производство вычислительной техники и т.п. Здесь каждый прототип может рассматриваться как модель будущего изделия.

Построения математических моделей на основе фундаментальных законов природы. Наиболее распространенный метод построения моделей состоит в применении фундаментальных законов природы к конкретной ситуации. Эти законы общепризнаны, многократно подтверждены опытом, служат основой множества научно-технических достижений. Поэтому их обоснованность не вызывает сомнений, что, помимо всего прочего, обеспечивает исследователю

мощную психологическую поддержку. На первый план выдвигаются вопросы, связанные с тем, какой закон (законы) следует применять в данном случае и как это делать.

Пример. Необходимо определить скорость полета пули с помощью закона сохранения энергии. Суть которого состоит в том, что энергия может переходить из одного вида в другой, может переходить от одного тела к другому, но общий запас механической энергии остаётся неизменным. Т.е. при отсутствии сил трения и при воздействии только сил упругости и тяготения суммарная потенциальная и кинетическая энергия тела или системы тел остается во всех случаях постоянной. Полагаясь на данный закон мы можем быстро определить скорость пули и не имея специальной лаборатории. Для этого воспользуемся относительно простым устройством, которое мы уже рассматривали, маятником — груза, подвешенного на легком жестком и свободно вращающемся стержне (см. рис.8.7).

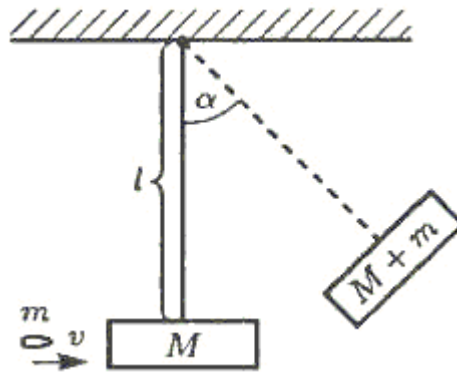


Рис. 8.7. Схема устройства для определения скорости пули

Пуля, застрявшая в грузе, сообщит системе «пуля—груз» свою кинетическую энергию, которая в момент наибольшего отклонения стержня от вертикали полностью перейдет в потенциальную энергию системы. Эти трансформации описываются цепочкой равенств:

$$\frac{mv^2}{2} = (M + m) \frac{V^2}{2} = (M + m)gl(1 - \cos \alpha). \quad (8.12)$$

здесь $mv^2/2$ — кинетическая энергия пули массы m , имеющей скорость v , M — масса груза, V — скорость системы «пуля—груз» сразу после столкновения, g — ускорение свободного падения, l — длина стержня, α — угол наибольшего отклонения. Искомая скорость может быть определена с помощью полученного выражения:

$$v = \sqrt{\frac{2(M + m)gl(1 - \cos \alpha)}{m}}, \quad (8.13)$$

которая будет справедливой, если не учитывать потери энергии на разогрев пули и груза, на преодоление сопротивления воздуха и т. д. Для точного определения скорости необходимо воспользоваться также законом сохранения импульса.

Построение моделей на основе аналогий. Часто построить математическую модель какого-либо объекта путем применения фундаментальных законов, которым он подчиняется невозможно с точки зрения наших сегодняшних знаний или вообще нет уверенности в существовании подобных законов, допускающих математическую формулировку. Одним из подходов к решению такого рода объектов является использование аналогий с уже изученными. Например, между радиоактивным распадом и динамикой популяций, в частности изменением

численности населения нашей планеты. Такая аналогия вполне просматривается на одной из простейших моделей популяций, называемая моделью Мальтуса. В ее основу положено простое утверждение - скорость изменения населения со временем t пропорциональна его текущей численности $N(t)$, умноженной на сумму коэффициентов рождаемости $\alpha(t) \geq 0$ и смертности $\beta(t) \leq 0$. В результате приходим к уравнению

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t), \quad (8.14)$$

похожему на уравнение радиоактивного распада и совпадающего с ним при (если α и β постоянные).

Построение вероятностной модели. Сначала приведем некоторые сведения из теории вероятностей. Назовем случайным событием A возможный исход некоторого опыта. События A_1, \dots, A_k образуют полную группу, если в результате опыта обязательно происходит одно из них. События называются несовместимыми, если они не могут произойти одновременно в одном опыте. Пусть при n -кратном повторении опыта событие A произошло m раз. Частотой события A называется число $W = m/n$. Очевидно, что значение W нельзя предсказать точно до проведения серии из n опытов. Однако природа случайных событий такова, что на практике иногда наблюдается следующий эффект: при увеличении числа опытов значение практически перестает быть случайным и стабилизируется около некоторого неслучайного числа $P(A)$, называемого вероятностью события A . Для невозможного события (которое никогда не происходит в опыте) $P(A)=0$, а для достоверного события (которое всегда происходит в опыте) $P(A)=1$. Если события A_1, \dots, A_k образуют полную группу несовместимых событий, то $P(A_1)+\dots+P(A_k)=1$. Суммой событий A и B называется событие $A + B$, состоящее в том, что в опыте происходит хотя бы одно из них. Произведением событий A и B называется событие AB , состоящее в одновременном появлении этих событий. Для независимых событий A и B верны формулы:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \quad (8.15)$$

Рассмотрим теперь следующую задачу. Предположим, что в электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятности отказов 1-го, 2-го и 3-го элементов соответственно равны $P_1 = 0,1$, $P_2 = 0,15$, $P_3 = 0,2$. Будем считать цепь надежной, если вероятность того, что в цепи не будет тока, не более $0,4$. Требуется определить, является ли данная цепь надежной. Так как элементы включены последовательно, то тока в цепи не будет (событие A), если откажет хотя бы один из элементов. Пусть A_i — событие, заключающееся в том, что i -й элемент работает ($i = 1, 2, 3$). Тогда $P(A_1) = 0,9$, $P(A_2) = 0,85$, $P(A_3) = 0,8$. Очевидно, что $A_1A_2A_3$ — событие, заключающееся в том, что одновременно работают все три элемента, и $P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,612$. Тогда $P(A) + P(A_1A_2A_3) = 1$, поэтому $P(A) = 0,388 < 0,4$. Следовательно, цепь является надежной.

Основные методы проверки правильности математической модели.

Аналитическое моделирование. Наиболее предпочтительной считается аналитическая постановка и такое же решение моделируемой задачи, поскольку в этом случае используется арсенал математического анализа, включая оптимизацию. Чаще всего оператором $A : X \rightarrow Y$ здесь служат системы алгебраических уравнений, для получения которых применяются различные методы аппроксимации имеющихся данных. Особая ценность аналитического моделирования заключается в возможности точного решения поставленной задачи, в том числе нахождения

оптимальных (наилучших в каком-то смысле) результатов. Следует отметить, что использование математической модели построенной с применением алгоритмических методов, аналогично проведению экспериментов с реальными объектами, только вместо натурального эксперимента с объектом проводится машинный (вычислительный) эксперимент с его моделью.

Математическое программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т. е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных. Наличие ограничений делает задачи математического программирования принципиально отличными от классических задач математического анализа по отысканию экстремальных значений функции. Для решения задач математического программирования разработаны и разрабатываются специальные методы и теории. Так как при решении этих задач приходится выполнять значительный объем вычислений, то при сравнительной оценке методов большое значение придается эффективности и удобству их реализации на ЭВМ. В зависимости от свойств целевой функции и функции ограничений все задачи математического программирования делятся на два основных класса:

- задачи линейного программирования,
- задачи нелинейного программирования.

Если целевая функция и функции ограничений – линейные функции, то соответствующая задача поиска экстремума является задачей линейного программирования. Если хотя бы одна из указанных функций нелинейна, то соответствующая задача поиска экстремума является задачей нелинейного программирования. Для решения задач линейного программирования разработано много методов, например, симплекс–метод. Симплекс-метод, известный также под названием метода последовательного улучшения плана, который разработал Данциг в 1947 г. Этот метод позволяет переходить от одного допустимого базисного решения к другому, причем так, что значения целевой функции непрерывно возрастают. В результате оптимальное решение находят за конечное число шагов. В большинстве инженерных задач построение математической модели не удастся свести к задаче линейного программирования. Математические модели в задачах проектирования реальных систем должны отражать реальные протекающие в них физические и, как правило, нелинейные процессы. Переменные этих систем связаны между собой физическими нелинейными законами, такими, как законы сохранения массы или энергии. Они ограничены предельными диапазонами, обеспечивающими физическую реализуемость данного объекта или процесса. В результате, большинство задач математического программирования, которые встречаются в научно-исследовательских проектах и в задачах проектирования – это задачи нелинейного программирования.

8.8. Контроль правильности и адекватности математических моделей.

Контроль правильности математических соотношений модели достигается выполнением следующих обязательных проверок:

- а) контроль размерностей, включающий правило, согласно которому приравняться, складываться, перемножаться и делиться могут только величины одинаковой размерности. При переходе к вычислениям он дополняется требованием соблюдения одной и той же системы единиц для значений всех параметров;
- б) проверка порядков, состоящая в сравнении порядков складываемых или вычитаемых величин и исключении из математических соотношений малозначимых параметров;
- в) контроль характера зависимостей, предполагающий, что направление и скорость изменения

выходных параметров модели должны быть такими, как это следует из физического смысла изучаемых процессов;

г) проверка математической замкнутости, состоящая в выявлении принципиальной возможности решения системы математических соотношений и получении на ее основе однозначно интерпретируемого результата. Математически замкнутой или «корректно поставленной задачей» принято считать такую ее постановку, при которой малым изменениям непрерывно меняющихся исходных данных соответствуют такие же незначительные изменения выходных результатов.

Адекватность математической модели. Под адекватностью (от лат. *adaequatus* – приравненный) будем понимать степень соответствия результатов, полученных по разработанной модели, данным эксперимента или тестовой задачи. Если система, для которой разрабатывается модель, существует, то сравнивают выходные данные модели и этой системы. В том случае, когда два набора данных оказываются подобными, модель существующей системы считается адекватной. Существует несколько аспектов оценки адекватности модели. Во-первых, математическая основа модели должна быть непротиворечивой, подчиняться всем законам математической логики. Во-вторых, математическая модель должна правильно отображать исходную систему и обеспечивать возможность предсказывать изменения ее состояния. Для этого в модели должны выполняться законы сохранения, присущие системе моделирования. Законы сохранения составляют основу описания любой системы и играют роль принципов отбора, сужая множество мысленно допустимых (виртуальных) движений и помогая создавать математические модели, правильно отображающие исследуемую систему. В-третьих, при анализе результатов моделирования, их интерпретации необходимо использовать не только формальные методы, но и, так называемые, неформальные процедуры, основанные на опыте и интуиции человека. Таким образом, оценка адекватности математической модели выполняется на различных этапах математического моделирования: при постановке задачи, в процессе построения модели, при анализе и интерпретации результатов, вследствие чего эта процедура приобретает циклический характер. Стандартной методики проверки адекватности модели исследуемой системе не существует. В каждом конкретном случае разработчик формирует систему вопросов, в которых отражаются все аспекты оценки адекватности и ответы на которые позволяют сделать вывод об адекватности модели и исследуемой системы, т.е. ответить на вопрос: отражает ли модель заданные свойства системы в соответствии с предъявляемыми требованиями, необходимыми для достижения целей моделирования. Необходимо отметить некоторые математические модели построенные на основе результатов экспериментальных исследований проверить их адекватность можно с помощью специальных критериев, например, F-критерия. Чтобы сравнивать модели по успешности достижения целей моделирования (по адекватности) необходимо определить количественную меру адекватности. Если это оказывается возможным, то открываются возможности для выбора из данного множества наиболее адекватной модели, исследования чувствительности и устойчивости моделей, определения или уточнения некоторых параметров модели.

8.9. Информационное моделирование

Различают два основных подхода информационного моделирования: универсальный (САПР) и специализированный (системы имитационного или численного моделирования. Возможно также моделирование на аналоговых вычислительных комплексах (АВМ, АВК).

Возможности вычислительного моделирования могут качественно отличаться от других видов моделирования благодаря уже достигнутой огромной производительности современных ЭВМ. Это обстоятельство может приводить к серьезному экономическому эффекту при внедрении в уже известные технологические процессы. Например, в 2002 г. самый мощный суперкомпьютер в мире был приобретён фирмой “General Motors”. Цель: полностью автоматизировать на базе

трехмерного математического моделирования этапы дизайна автомобиля и разработки ходовой части. Это привело к сокращению сроков разработки новых моделей легковых автомобилей с трех лет до одного года (от идеи до массового выпуска) при уменьшении общих трудозатрат, что дало мощные конкурентные преимущества на мировом рынке.

Обобщая информацию о видах моделирования, нетрудно заметить, что все они в той или иной мере связаны с математикой, то есть имеют непосредственное отношение к математическому моделированию. При этом наряду с умением правильно применять математические модели не менее актуально умение правильно ставить задачи математического моделирования.

Информационная модель – это, по существу, автоматизированный справочник, реализованный с помощью систем управления базами данных (СУБД). По формальному запросу эти модели позволяют найти любую, имеющуюся в базе данных (БД) информацию, однако эти модели не могут генерировать новое знание, отсутствующее в БД, т.е. это модели с нулевым потенциалом. Однако в сочетании с математическими моделями они способны генерировать новое знание. Так как в качестве Ω_X и Ω_Y моделей могут выступать математические объекты, а саму процедуру поиска данных можно представить в виде некоторого оператора, то информационные модели можно считать специфической разновидностью математических моделей.

Примеры информационных технологий моделирования систем.

1. CALS-технологии (англ. Continuous Acquisition and Life cycle Support — непрерывная информационная поддержка поставок и жизненного цикла) — современный подход к проектированию и производству высокотехнологичной и наукоёмкой продукции, заключающийся в использовании компьютерной техники и современных информационных технологий на всех стадиях жизненного цикла изделия, обеспечивающая единообразные способы управления процессами и взаимодействия всех участников этого цикла: заказчиков продукции, поставщиков, производителей продукции, эксплуатационного и ремонтного персонала, реализованная в соответствии с требованиями системы международных стандартов, регламентирующих правила указанного взаимодействия преимущественно посредством электронного обмена данными.

CALS-технологии – это унификация и стандартизация спецификаций промышленной продукции на всех этапах ее жизненного цикла. Одна из наиболее известных реализаций CALS-технологии разработана фирмой Computervision – технология EPD (Electronic Product Definition) и ориентирована на поддержку процессов проектирования и эксплуатации изделий машиностроения.

Технологию EPD реализуют:

CAD (Computer Aided Design) – система автоматизированного проектирования;

CAM (Computer Aided Manufacturing) – автоматизированная система технологической подготовки производства;

CAE (Computer Aided Engineering) – система моделирования и расчетов;

CAPE (Concurrent Art-to-Product engineering) – система поддержки параллельного проектирования;

PDM (Product Data Manager) – система управления проектными данными, представляющая собой специализированную СУБД (DBMS – Data Base Management System);

3D Viewer –система трехмерной визуализации;

CADD (Computer Aided Design Documents) –система документирования;

CASE (Computer Aided Software (System) Engineering) – система разработки и сопровождения программного обеспечения; методики обследования и анализа функционирования предприятия.

2. PEST-анализ (Political, Economical, Social, Technological) PEST- анализ концентрирует внимание на внешних макроэкономических факторах.

Политические факторы: налоговая политика, трудовое законодательство, экологическое законодательство, торговые и транспортные ограничения, политическая стабильность.

Экономические факторы: рост экономики, процентная ставка, курс валюты, уровень инфляции.

3. CASE-технология (Computer Aided Software (System) Engineering) - технология представляет собой методологию проектирования информационных систем (ИС), а также набор инструментальных средств, позволяющих в наглядной форме моделировать предметную область, анализировать эту модель на всех этапах разработки и сопровождения ИС и разрабатывать приложения в соответствии с потребностями пользователей. Большая часть CASE-средств использует методологию функционально-структурного (в основном) или объектно-ориентированного анализа и проектирования, использующих спецификации в виде диаграмм или текстов для описания внешних требований, связей между моделями системы, динамики поведения системы и архитектуры программных средств. Обычно к CASE-средствам относят любое программное средство, автоматизирующее ту или иную совокупность процессов жизненного цикла ПО.

8.10. Этапы разработки информационных моделей

Моделирование – от постановки задачи до получения результатов, включает следующие этапы:

I. Анализ требований и проектирование.

1. Постановка и анализ задачи и цели моделирования.
2. Сбор и анализ исходной информации об объекте моделирования.
3. Построение концептуальной модели.
4. Проверка достоверности концептуальной модели.

II. Разработка модели.

1. Выбор среды моделирования.
2. Составление логической модели.
3. Назначение свойств модулям модели.
4. Задание модельного времени.
5. Верификация модели.

III. Проведение эксперимента.

1. Запуск модели, прогон модели.
2. Варьирование параметров модели и сбор статистики.
3. Анализ результатов моделирования.

IV. Подведение итогов моделирования согласно поставленной цели и задачи моделирования.

Схема этапов моделирования представлена на рис. 8.8.



Рис. 8.8. Схема создания модели

Необходимо отметить, что при разработке конкретных моделей с определенными целями и границами моделирования не обязательно все подэтапы должны выполняться. Например, при разработке статических моделей IDEF0, DFD 3 и 4 подэтапы «Разработки модели» не выполняются, т. к. эти методологии не предусматривают задание временных параметров модели.