## Тема 7. Случайный двоичный сигнал

### *7.1. Цель работы*

Изучение цепей Маркова с непрерывным временем на примере случайного двоичного сигнала.

### *7.2. Теоретические положения*

Рассмотрим конечную цепь Маркова с непрерывным временем и двумя состояниями $E_1$ и $E_2$. Пусть эти состояния имеют численные значения $E_1 = -1$ и $E_2 = 1$, причем вероятность перехода за малое время $\Delta t$ в другое состояние определяется условием

$$p_{1,2}(\Delta t) = p_{2,1}(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t). \qquad (7.1)$$

Такой процесс называется случайным телеграфным или случайным двоичным сигналом. Одна из реализаций этого процесса приведена на рис. 7.1.

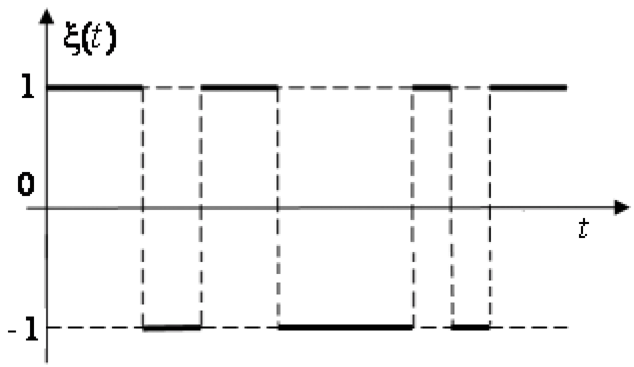


Рис. 7.1. Реализация случайного телеграфного сигнала

Условие (7.1) означает, что инфинитезимальная матрица процесса имеет следующий вид:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}. \qquad (7.2)$$

Матрица вероятностей перехода $P(t)$ имеет размер 2x2:

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{1,1}(t) & p_{1,2}(t) \\ p_{2,1}(t) & p_{2,2}(t) \end{bmatrix}.$$

Найдём эту матрицу как решение прямой системы дифференциальных уравнений

$$P'(t) = P(t)Q$$

с начальными условиями

$$P(0) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Известно, что решением этих уравнений является матричная экспонента, которая определятся как следующий ряд:

$$P(t) = P(0)e^{Qt} = I(I + Qt + \frac{1}{2!}(Qt)^2 + \frac{1}{3!}(Qt)^3 + ...) \qquad (7.3)$$

Отсюда получаем, что

$$p_{1,1}(t) = p_{2,2}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\lambda t},$$

$$p_{1,2}(t) = p_{2,1}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\lambda t}. \qquad (7.4)$$

Чтобы убедиться в справедливости последних формул, необходимо разложить эти функции в ряды Тейлора в окрестности нуля и сравнить их с рядом (7.3) для матрицы $P(t)$.

Для случайного телеграфного сигнала существуют предельные вероятности

$$p_j^* = \lim_{t \to \infty} p_{i,j}(t).$$

Из формул (7.4) при $t \to \infty$ получаем:

$$p_1^* = p_2^* = \frac{1}{2}.$$

Эти вероятности будут для больших моментов времени и безусловными:

$$a_1^* = P(\xi(t)=1) = \frac{1}{2},$$

$$a_2^* = P(\xi(t)=1) = \frac{1}{2}.$$

Теперь можно найти математическое ожидание и ковариационную функцию телеграфного сигнала. Для больших моментов времени (для стационарного состояния) получим

$$E(\xi(t)) = 1\cdot P(\xi(t)=1) - 1\cdot P(\xi(t)=-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \qquad (7.5)$$

$$R_\xi(\tau) = E(\xi(t)\xi(t+\tau)) =$$

$$= 1\cdot 1\cdot a_1^*\cdot p_{1,1}(\tau) + 1\cdot(-1)\cdot a_1^*\cdot p_{1,2}(\tau) + (-1)\cdot 1\cdot a_2^*\cdot p_{2,1}(\tau) + (-1)\cdot(-1)\cdot a_2^*\cdot p_{2,2}(\tau) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2\lambda\tau} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2\lambda\tau}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2\lambda\tau}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2\lambda\tau} = e^{-2\lambda\tau},\ \tau > 0. \quad (7.6)$$

Учитывая, что ковариационная функция является четной, получаем выражение ковариационной функции для любых $\tau$:

$$R_\xi(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}.$$

### *7.3. Программные средства для выполнения работы*

Для автоматизации расчетов удобно пользоваться функцией **expm.**

**y=expm(x)** вычисляет матричную экспоненту $e^x$, где $x$ – $(n\times n)$-матрица-аргумент; $y$ – $(n\times n)$-матрица-функция.

*Пример 7.1.* Программа

```
clc
clear
x=[-1,2;3,-2];
y=expm(x)
```

выдает результат

```
y =
```

1.6383    1.0800

1.6200    1.0983

Если **x** – символьная $(n \times n)$-матрица, то **y=expm(x)** вычисляет $(n \times n)$-матрицу **y** в символьном виде.

*Пример 7.2*. Программа

```
clc
clear
syms t
syms lam mu positiv
x=[-lam,lam;mu,-mu];
y=expm(x*t)
```

выдает результат

```
y =
[ (mu+lam*exp(-t*lam-t*mu))/(lam+mu), -lam*(exp(-t*lam-t*mu)-1)/(lam+mu)]
[  -mu*(exp(-t*lam-t*mu)-1)/(lam+mu), (lam+mu*exp(-t*lam-t*mu))/(lam+mu)]
```

### *7.4. Порядок выполнения работы*

7.4.1. Предложить и запрограммировать алгоритм моделирования реализаций случайного двоичного сигнала, описанного выше.

7.4.2. Рассчитать среднее значение и ковариационную функцию для стационарного состояния описанного выше сигнала в предположении, что состояния $E_1$ и $E_2$ принимают различные числовые значения $c_1$ и $c_2$, и вероятности перехода за малое время $\Delta t$ в другое состояние определяются условиями

$$p_{1,2}(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t); \quad p_{2,1}(\Delta t) = \mu \Delta t + o(\Delta t),$$

т.е. инфинитезимальная матрица имеет вид

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}. \tag{7.7}$$

7.4.3. Оформить полученные результаты в виде отчета. Отчет должен содержать титульный лист с темой практического занятия, номером варианта и данными о студенте (ФИО, номер группы), исходные данные к варианту задания, коды написанных программ, полученные при их работе графические и численные результаты, краткие выводы.

### *7.5. Контрольные вопросы*

1. Что такое матричная экспонента?
2. Запишите аналоги выражений (7.5), (7.6) для расчета математического ожидания и ковариационной функции описанного в работе сигнала в предположении, что состояния $E_1$ и $E_2$ принимают различные числовые значения $c_1$ и $c_2$ и инфинитезимальная матрица имеет вид (7.2).
3. Запишите матричную экспоненту (7.3) для случая инфинитезимальной матрицы (7.7) и выпишите ее элементы.