

2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ .....	2
2.1. Определение случайного процесса. Классификация случайных процессов .....	2
2.2. Конечномерные распределения случайного процесса .....	6
2.3. Математическое ожидание и дисперсия случайного процесса .....	9
2.4. Ковариационная функция случайного процесса .....	11
2.5. Взаимная ковариационная функция случайных процессов .....	14
2.6. Стационарный случайный процесс .....	15
2.7. Гауссовский (нормальный) случайный процесс .....	22

## 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

### 2.1. Определение случайного процесса. Классификация случайных процессов

В теории случайных процессов изучаются задачи построения и анализа математических моделей случайных явлений, развивающихся во времени. Как математический объект случайный процесс определяется следующим образом. Предполагается заданным некоторое вероятностное пространство  $\{\Omega, F, P\}$ .

*Определение 2.1.* Случайным процессом называется функция  $\xi(\omega, t)$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in T$ , которая для любого фиксированного  $t \in T$  является измеримой функцией аргумента  $\omega$ .

Аргумент  $t$  здесь понимается как время из некоторого промежутка времени  $T$ , а аргумент  $\omega$  – это элементарный исход (случай). При фиксированном  $t = t_1$  мы получаем функцию случая  $\xi(\omega, t_1)$ , т. е. случайную величину, которая называется сечением процесса в момент времени  $t_1$ . Если зафиксировать случай  $\omega = \omega_1$ , то получим функцию времени  $\xi(\omega_1, t)$ , которая называется реализацией, траекторией или выборочной функцией случайного процесса.

На рис. 2.1 приведены три реализации (траектории) случайного процесса и его сечение в момент времени  $t_1$ . В качестве реализаций взяты графики температуры атмосферного воздуха на метеостанции Минск в феврале 1998, 1999, 2000 годов.

В связи с тем, что чаще всего множество  $\Omega$  оказывается недоступным, т. е. элементарные исходы не наблюдаются, случайный процесс обозначают как функцию только времени  $\xi(t)$ , а зависимость от  $\omega$  подразумевается.

В некоторых случаях случайный процесс  $\xi(\omega, t)$  может быть задан в виде явного аналитического выражения

$$\xi(\omega, t) = g(t, \mu_1, \mu_2, \dots), \quad (2.1)$$

где  $\{\mu_1, \mu_2, \dots\}$  – конечное или счетное множество случайных величин  $\mu_1(\omega)$ ,  $\mu_2(\omega)$ , ..., т.е. функций от  $\omega$ , и  $g$  – некоторая функция. Такую форму представления случайного процесса будем называть параметрической. Изучение случайного процесса в параметрической форме сводится к изучению функции случайных величин, зависящей также от неслучайного аргумента  $t$ .

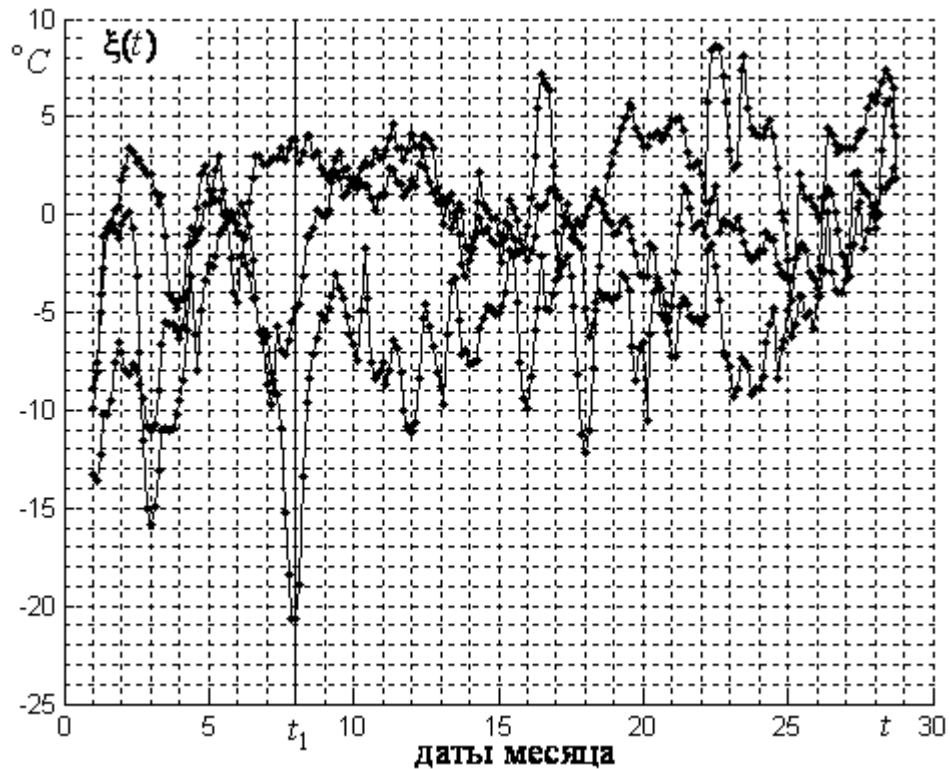


Рис. 2.1. Реализации случайного процесса общего типа (температуры атмосферного воздуха на метеостанции Минск в феврале 1998, 1999, 2000 годов)

Примером случайного процесса, заданного в параметрической форме, является так называемый веерный случайный процесс, определяемый формулой

$$\xi(t) = \alpha + \beta t, \quad (2.2)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – случайные величины. Реализации этого процесса представляют собой прямые линии, имеющие случайные значения углового коэффициента и смещения по оси ординат (см. рис. 2.2).

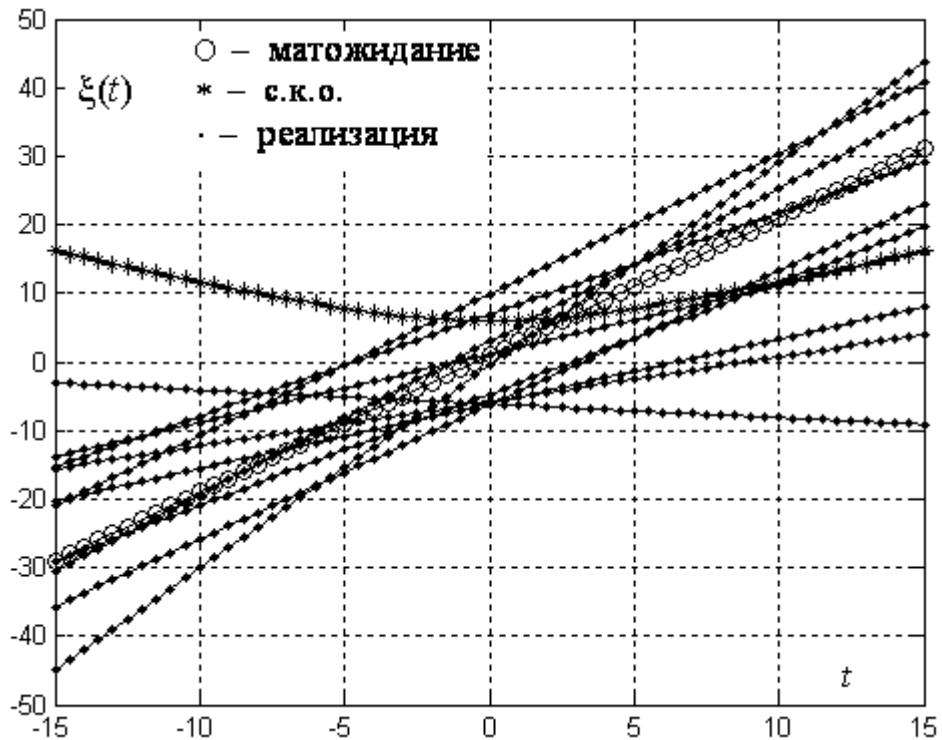


Рис. 2.2. Реализации, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение случайного процесса (2.2)

Назовем любое множество  $G$  дискретным, если оно конечное или счетное, и непрерывным, если оно несчетное.

Случайные процессы классифицируются по виду множеств  $T$  и  $G$ , где  $G$  – множество возможных значений случайного процесса. Эти множества могут быть непрерывными или дискретными, в связи с чем различают 4 класса случайных процессов.

1.  $T$  и  $G$  – непрерывные множества. Это процесс с непрерывным временем и непрерывным множеством значений или процесс общего типа. Пример реализаций такого процесса представлен на рис. 2.1.

2.  $T$  дискретно,  $G$  непрерывно. Это процесс с дискретным временем и непрерывным множеством значений или случайная последовательность. Пример реализации такого процесса представлен на рис. 2.3.

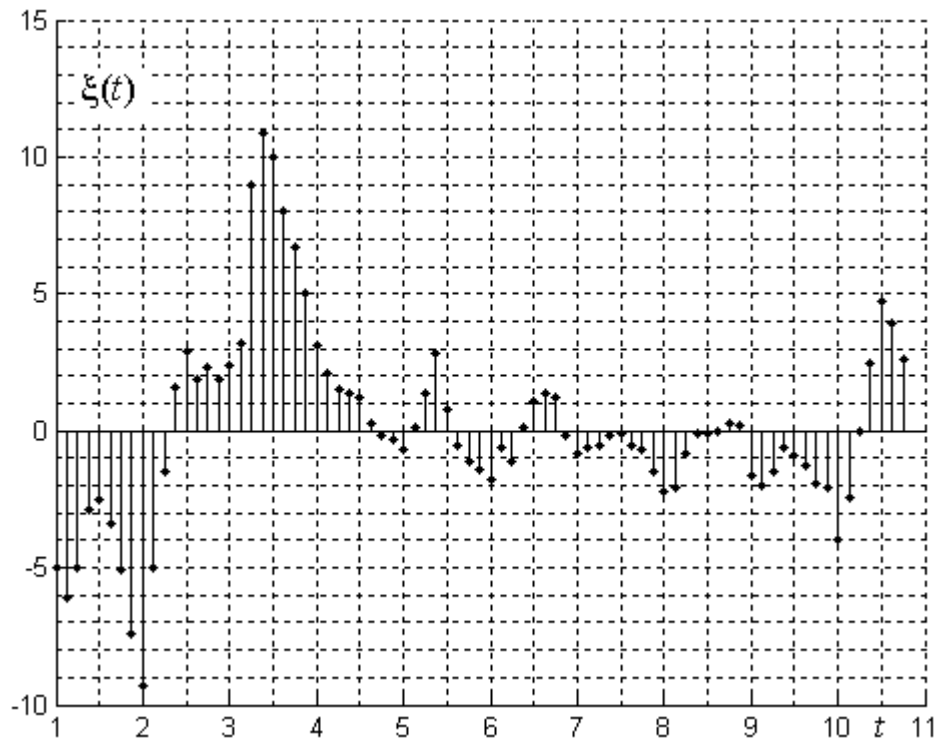


Рис. 2.3. Реализация случайной последовательности

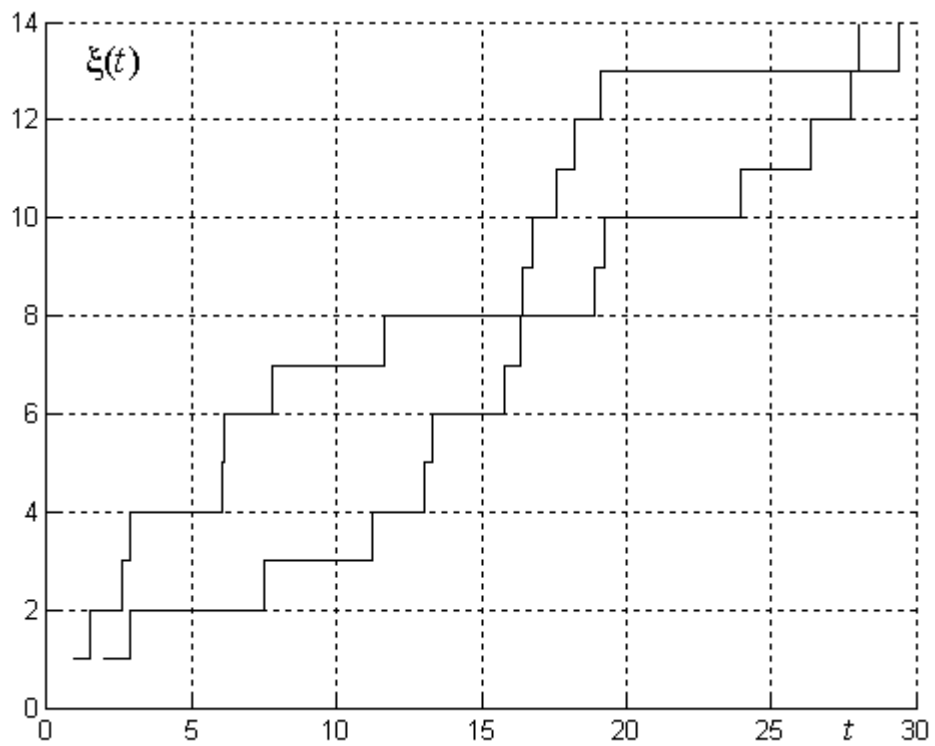


Рис. 2.4. Реализации дискретного случайного процесса

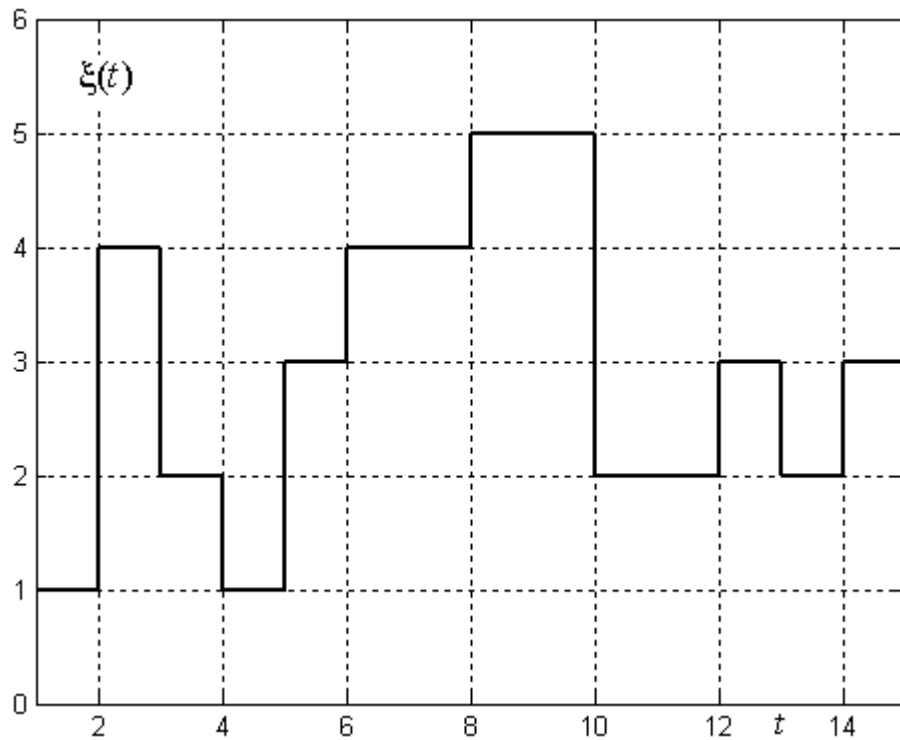


Рис. 2.5. Реализация дискретной случайной последовательности

3.  $T$  непрерывно,  $G$  дискретно. Это процесс с непрерывным временем и дискретным множеством значений или дискретный случайный процесс. Пример реализации такого процесса представлен на рис. 2.4.

4.  $T$  дискретно,  $G$  дискретно. Это процесс с дискретным временем и дискретным множеством значений или дискретная случайная последовательность. Пример реализации такого процесса представлен на рис. 2.5.

Случайные последовательности часто называют случайными временными рядами.

## 2.2. Конечномерные распределения случайного процесса

Рассмотрим случайный процесс  $\xi(t)$  и зафиксируем  $n$  моментов времени  $t_1, \dots, t_n$ . Мы получим  $n$  сечений процесса  $\xi_1 = \xi(t_1)$ ,  $\xi_2 = \xi(t_2)$ , ...,  $\xi_n = \xi(t_n)$ .

Конечномерной ( $n$ -мерной) функцией распределения случайного процесса  $\xi(t)$  называется функция распределения случайного вектора  $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,

компоненты которого  $\xi_i$  являются сечениями процесса в моменты времени  $t_1, \dots, t_n$ :

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = P(\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n). \quad (2.3)$$

Конечномерная функция распределения случайного процесса  $\xi(t)$  является функцией  $2n$  аргументов:  $n$  аргументов  $x_1, \dots, x_n$  и  $n$  аргументов  $t_1, \dots, t_n$ . Она должна обладать свойствами симметрии и согласованности.

Свойство симметрии заключается в том, что любые два аргумента функции распределения  $x_i$  и  $x_j$  можно менять местами, поменяв при этом местами соответствующие аргументы  $t_i$  и  $t_j$ :

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n, t_1, \dots, t_i, \dots, t_j, \dots, t_n) = \\ = F_{\xi}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n, t_1, \dots, t_j, \dots, t_i, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Для двухмерной функции распределения это свойство выражается равенством

$$F_{\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2) = F_{\xi}(x_2, x_1, t_2, t_1).$$

Свойство согласованности выражается условием

$$\begin{aligned} \lim_{x_k \rightarrow \infty} F_{\xi}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n) = \\ = F_{\xi}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n), \end{aligned}$$

т. е. если в  $n$ -мерной функции распределения аргумент  $x_k$  заменить на  $\infty$ , то мы получим  $(n-1)$ -мерную функцию распределения (этот аргумент исчезает из списка аргументов функции распределения вместе с соответствующим ему аргументом  $t_k$ ).

Конечномерной ( $n$ -мерной) плотностью вероятности случайного процесса  $\xi(t)$  называется смешанная производная  $n$ -го порядка от  $n$ -мерной функции распределения:

$$f_{\xi}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{\xi}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n). \quad (2.4)$$

Конечномерную функцию распределения (2.3) или конечномерную плотность вероятности (2.4) называют конечномерным распределением случайного процесса.

Совокупность конечномерных распределений для любого конечного  $n$  и произвольных моментов времени  $t_1, \dots, t_n$  называется семейством конечномерных распределений случайного процесса.

Случайный процесс наиболее полно описывается семейством конечномерных распределений. Так как это семейство бесконечное, то такое описание представляется чрезвычайно сложным. Выход состоит в том, что рассматривают определенные классы случайных процессов. Например, можно рассматривать класс процессов, которые описываются семейством одномерных распределений  $f_\xi(x, t)$ , или, если все одномерные распределения совпадают, то одним одномерным распределением. Такой процесс, естественно, будет обладать тривиальными свойствами и не слишком широкой областью применения. Второй класс процессов – процессы, описываемые семейством двумерных распределений  $f_\xi(x_1, x_2, t_1, t_2)$  для любых моментов времени  $t_1, t_2$  из интересующего нас промежутка времени  $T$ . Этот класс процессов имеет более широкий спектр свойств и более широкое применение.

Если на одном и том же вероятностном пространстве  $\{\Omega, F, P\}$  задано несколько случайных процессов  $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$ , то говорят, что задан многомерный ( $n$ -мерный) или, иначе, векторный случайный процесс  $\bar{\xi}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t))$ ,  $t \in T$ . Описанием векторного случайного процесса является семейство совместных конечномерных распределений сечений  $\bar{\xi}(t_1), \bar{\xi}(t_2), \dots, \bar{\xi}(t_m)$ . В частности, совместные двумерные функция распределения и плотность вероятности двумерного случайного процесса  $\bar{\xi}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$  определяются естественным образом:

$$F_\xi(x_1, y_1, x_2, y_2, t_1, t_2) = P(\xi_1(t_1) < x_1, \xi_2(t_1) < y_1, \xi_1(t_2) < x_2, \xi_2(t_2) < y_2), \quad (2.5)$$

$$f_{\xi}(x_1, y_1, x_2, y_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^4 F_{\xi}(x_1, y_1, x_2, y_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial y_1 \partial x_2 \partial y_2}. \quad (2.6)$$

Случайный процесс, содержащий действительную и мнимую части, т.е. случайный процесс вида

$$\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t),$$

где  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  – действительные случайные процессы,  $i = \sqrt{-1}$ , называется комплексным случайным процессом. Комплексно-сопряженный случайный процесс обозначается  $\overline{\xi(t)}$ , так что

$$\overline{\xi(t)} = \xi_1(t) - i\xi_2(t).$$

Комплексный случайный процесс можно считать двумерным случайным процессом и описывать совместными распределениями действительной и мнимой частей, т.е. как двумерный случайный процесс – функциями (2.5) или (2.6).

### 2.3. Математическое ожидание и дисперсия случайного процесса

Будем рассматривать случайные процессы, для которых существуют конечные плотности вероятности. К таким процессам относятся процессы с непрерывным множеством значений.

Математическим ожиданием  $E(\xi(t))$  случайного процесса  $\xi(t)$  называется функция  $a_{\xi}(t)$ , определяемая выражением

$$a_{\xi}(t) = E(\xi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x, t) dx,$$

где  $f_{\xi}(x, t)$  – одномерная плотность вероятности случайного процесса,  $E(\cdot)$  – символ математического ожидания (усреднения). Для случайных процессов, заданных в параметрической форме (2.1), математическое ожидание определяется формулой

$$a_{\xi}(t) = E(\xi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) d\mu_1 d\mu_2 \dots d\mu_n,$$

где  $f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  – совместная плотность вероятности случайных величин  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ .

Математическое ожидание характеризует тенденцию развития случайного процесса во времени.

На рис. 2.2 представлены реализации и математическое ожидание случайного процесса вида (2.2), где  $\alpha$  и  $\beta$  – независимые случайные величины, распределенные по нормальным законам  $N(a_\alpha, \sigma_\alpha^2)$ ,  $N(a_\beta, \sigma_\beta^2)$  соответственно. Выражение математического ожидания этого случайного процесса имеет вид

$$a_\xi(t) = a_\alpha + a_\beta t.$$

Видно, что реализации этого случайного процесса имеют тенденцию к возрастанию, в связи с чем возрастающей является и функция математического ожидания.

Дисперсией  $D(\xi(t))$  случайного процесса  $\xi(t)$  называется математическое ожидание квадрата отклонения случайного процесса от его математического ожидания:

$$\sigma_\xi^2(t) = D(\xi(t)) = E((\xi(t) - a_\xi(t))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_\xi(t))^2 f_\xi(x, t) dx,$$

где  $f_\xi(x, t)$  – одномерная плотность вероятности случайного процесса,  $D(\cdot)$  – символ дисперсии. Для случайных процессов, заданных в параметрической форме (2.1), дисперсия определяется формулой

$$\sigma_\xi^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (g(t, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) - a_\xi(t))^2 f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) d\mu_1 d\mu_2 \dots d\mu_n,$$

где  $f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  – совместная плотность вероятности случайных величин  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ .

Дисперсия  $\sigma_\xi^2(t)$  случайного процесса  $\xi(t)$  является функцией времени, которая характеризует среднее отклонение реализаций процесса от его математического ожидания в любой момент времени  $t$ .

На рис. 2.2 изображена функция  $\sigma_{\xi}(t) = \sqrt{\sigma_{\xi}^2(t)}$  – среднее квадратичное отклонение (с.к.о.) случайного процесса (2.2). Дисперсия этого случайного процесса определяется выражением

$$\sigma_{\xi}^2(t) = E((\overset{\circ}{\alpha} + \overset{\circ}{\beta}t)^2) = E((\overset{\circ}{\alpha})^2) + E(\overset{\circ}{\alpha}\overset{\circ}{\beta}t) + E((\overset{\circ}{\beta}t)^2) = \sigma_{\alpha}^2 + \sigma_{\beta}^2 t^2,$$

где  $\overset{\circ}{\alpha}$  и  $\overset{\circ}{\beta}$  – центрированные случайные величины. Поскольку реализации имеют тенденцию при  $t \rightarrow \infty$  все более отклоняться от функции математического ожидания, то с.к.о. процесса является возрастающей функцией при  $t \rightarrow \infty$ .

## 2.4. Ковариационная функция случайного процесса

Пусть  $\xi(t)$  – случайный процесс, и  $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - E(\xi(t))$  – центрированный случайный процесс.

Ковариационной функцией  $R_{\xi}(t_1, t_2)$  случайного процесса  $\xi(t)$  называется коэффициент ковариации между сечениями процесса в два момента времени  $t_1$ ,  $t_2$ :

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = \text{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2)) = E(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)).$$

Ковариационная функция  $R_{\xi}(t_1, t_2)$  комплексного случайного процесса  $\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$  определяется следующим образом:

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = \text{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2)) = E(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overline{\overset{\circ}{\xi}(t_2)}).$$

Для процессов, имеющих конечномерные плотности вероятности, ковариационная функция рассчитывается по формуле

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - a_{\xi}(t_1))(x_2 - a_{\xi}(t_2)) f_{\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2,$$

где  $f_{\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2)$  – двумерная плотность вероятности случайного процесса.

Ковариационная функция является функцией двух аргументов  $t_1, t_2$ . Она характеризует силу линейной стохастической связи между двумя сечениями случайного процесса в моменты времени  $t_1, t_2$ .

Выберем  $n$  моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Квадратная матрица  $R = (R_{i,j})$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , составленная из значений ковариационной функции  $R_{i,j} = R_\xi(t_i, t_j)$ , называется ковариационной матрицей случайного процесса  $\xi(t)$ .

На рис. 2.6 представлена ковариационная функция случайного процесса (2.2). Она определяется выражением

$$R_\xi(t_1, t_2) = E((\overset{\circ}{\alpha} + \overset{\circ}{\beta}t_1)(\overset{\circ}{\alpha} + \overset{\circ}{\beta}t_2)) = E((\overset{\circ}{\alpha})^2) + E(\overset{\circ}{\beta}^2 t_1 t_2) = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 t_1 t_2.$$

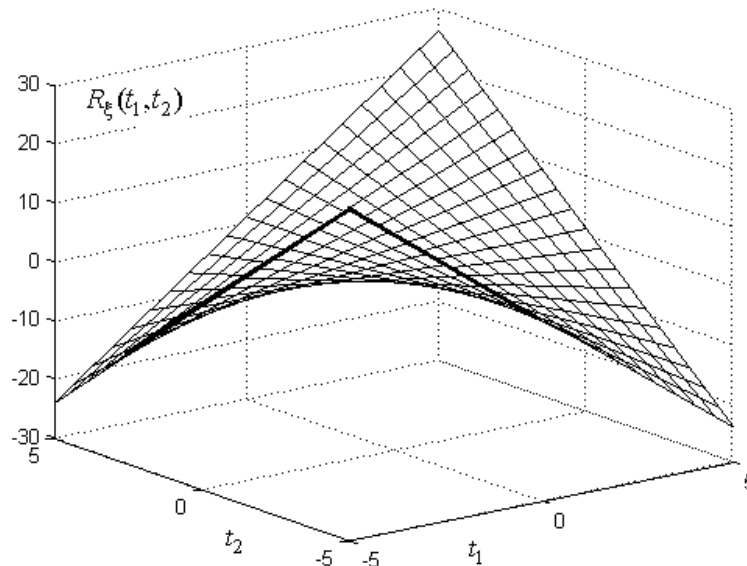


Рис. 2.6. Ковариационная функция случайного процесса (2.2)

Ковариационная функция любого случайного процесса имеет следующие свойства.

1. Это симметричная функция своих аргументов:

$$R_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(t_2, t_1).$$

Действительно, имеем

$$R_\xi(t_1, t_2) = E(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)) = E(\overset{\circ}{\xi}(t_2)\overset{\circ}{\xi}(t_1)) = R_\xi(t_2, t_1).$$

2. Дисперсия процесса в момент времени  $t$  определяется как значение ковариационной функции в точке  $t, t$ :

$$D_{\xi}(t) = \sigma_{\xi}^2(t) = R_{\xi}(t, t).$$

Действительно,

$$R_{\xi}(t, t) = E(\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t)) = E(\overset{\circ}{\xi}^2(t)) = D(\overset{\circ}{\xi}(t)) = \sigma_{\xi}^2(t).$$

3. Ковариационная функция подчиняется неравенству

$$R_{\xi}^2(t_1, t_2) \leq R_{\xi}(t_1, t_1)R_{\xi}(t_2, t_2).$$

Это свойство является интерпретацией известного неравенства Шварца  $E^2(uv) \leq E(u^2)E(v^2)$  (п. 1.14), если выбрать в нем  $u = \overset{\circ}{\xi}(t_1)$ ,  $v = \overset{\circ}{\xi}(t_2)$ .

4. Ковариационная функция является неотрицательно определенной функцией. Это свойство означает, что для любых моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  и любых действительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{\xi}(t_i, t_j) x_i x_j \geq 0.$$

Свойство доказывается путем следующих очевидных преобразований:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{\xi}(t_i, t_j) x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(\overset{\circ}{\xi}(t_i)\overset{\circ}{\xi}(t_j)) x_i x_j = E\left(\left(\sum_{i=1}^n \overset{\circ}{\xi}(t_i) x_i\right)^2\right) \geq 0.$$

Из свойства 1 ковариационной функции с очевидностью вытекает, что ковариационная матрица  $R$  является симметричной и неотрицательно определенной. Симметричность матрицы означает, что  $R_{j,i} = R_{i,j}$ .

Из свойства 4 ковариационной функции вытекает, что ковариационная матрица  $R$  является неотрицательно определенной, т.е. для любого вектора столбца действительных чисел  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  выполняется соотношение

$$X^T R X \geq 0.$$

Из свойства 2 ковариационной функции следует, что на главной диагонали ковариационной матрицы  $R$  располагаются дисперсии случайного процесса в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ .

Корреляционной функцией случайного процесса  $\xi(t)$  называется коэффициент корреляции между сечениями процесса в моменты  $t_1, t_2$ , или, иначе, нормированная ковариационная функция:

$$r_{\xi}(t_1, t_2) = \frac{R_{\xi}(t_1, t_2)}{\sqrt{R_{\xi}(t_1, t_1)R_{\xi}(t_2, t_2)}}.$$

Свойства корреляционной функции автоматически вытекают из соответствующих свойств ковариационной функции:

- 1)  $r_{\xi}(t_1, t_2) = r_{\xi}(t_2, t_1)$ ,
- 2)  $r_{\xi}(t, t) = 1$ ,
- 3)  $r_{\xi}^2(t_1, t_2) \leq 1$ ,
- 4)  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{\xi}(t_i, t_j) x_i x_j \geq 0$ .

## 2.5. Взаимная ковариационная функция случайных процессов

Двухмерной совместной функцией распределения случайных процессов  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$ , или, иначе, векторного случайного процесса  $\bar{\xi}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ , называется функция, определяемая выражением

$$F_{\bar{\xi}}(x, y, t_1, t_2) = P(\xi_1(t_1) < x, \xi_2(t_2) < y),$$

где  $t_1, t_2$  – два момента времени.

Двухмерной совместной плотностью вероятности случайных процессов  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  называется смешанная производная второго порядка от совместной функции распределения:

$$f_{\bar{\xi}}(x, y, t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\bar{\xi}}(x, y, t_1, t_2).$$

Взаимной ковариационной функцией случайных процессов  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  называется коэффициент ковариации между сечениями  $\xi_1(t_1)$ ,  $\xi_2(t_2)$  этих процессов:

$$R_{\xi_1, \xi_2}(t_1, t_2) = \text{cov}(\xi_1(t_1), \xi_2(t_2)) = E(\xi_1(t_1)\xi_2(t_2)) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - a_{\xi_1}(t_1))(y_2 - a_{\xi_2}(t_2)) f_{\bar{\xi}}(x, y, t_1, t_2) dx dy.$$

Взаимная ковариационная функция характеризует силу линейной связи между сечениями двух процессов в два различных момента времени  $t_1, t_2$ . Она обладает следующим очевидным свойством:

$$R_{\xi_1, \xi_2}(t_1, t_2) = R_{\xi_2, \xi_1}(t_2, t_1).$$

## 2.6. Стационарный случайный процесс

Случайный процесс  $\xi(t)$  называется стационарным в строгом или узком смысле, если его конечномерные распределения инвариантны к сдвигу по оси времени (не зависят от этого сдвига).

Для конечномерных функций распределения свойство инвариантности записывается в виде

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = F_{\xi}(x_1, \dots, x_n, t_1 + s, \dots, t_n + s),$$

где  $s$  – некоторое число, характеризующее сдвиг по оси времени. Аналогичный вид имеет свойство инвариантности для конечномерных плотностей вероятности:

$$f_{\xi}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = f_{\xi}(x_1, \dots, x_n, t_1 + s, \dots, t_n + s). \quad (2.7)$$

Плотность вероятности слева в равенстве (2.7) определяет свойства случайного процесса в моменты времени  $t_1, \dots, t_n$ , а справа – в сдвинутые по оси времени на величину  $s$  моменты времени  $t_1 + s, \dots, t_n + s$ . Равенство этих функций означает, что свойства процесса в моменты  $t_1, \dots, t_n$  такие же, как и в моменты  $t_1 + s, \dots, t_n + s$ , т.е. не меняются с течением времени. Таких процессов в природе не существует, но если рассматривать процесс на некотором конечном промежутке времени, то предположение стационарности может оказаться допустимым.

*Теорема 2.1.* Если случайный процесс  $\xi(t)$  стационарен в узком смысле, то его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а ковариационная функция  $R_\xi(t_1, t_2)$  не зависит от  $t_1$  и  $t_2$  в отдельности, а зависит лишь от их разности  $\tau = t_2 - t_1$ , т. е. является функцией не двух аргументов  $t_1, t_2$ , а одного аргумента  $\tau = t_2 - t_1$ :

$$R_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(t_2 - t_1) = R_\xi(\tau).$$

Действительно, условие стационарности (2.7) для одномерной плотности вероятности имеет вид  $f_\xi(x_1, t_1) = f_\xi(x_1, t_1 + s)$ . Так как это равенство выполняется для любого  $s$ , то, выбрав  $s = t_1$ , получим

$$f_\xi(x_1, t_1) = f_\xi(x_1, t_1 - t_1) = f_\xi(x_1, 0) = f_\xi(x_1).$$

Мы видим, что одномерная плотность вероятности стационарного в узком смысле процесса не зависит от времени. Тогда для математического ожидания и дисперсии получим

$$a_\xi(t) = E(\xi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx = a_\xi = \text{const},$$

$$\sigma_\xi^2(t) = E(\xi^2(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_\xi)^2 f_\xi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 f_\xi(x) dx = \sigma_\xi^2 = \text{const}.$$

Запишем теперь условие инвариантности (2.7) для двумерной плотности вероятности:

$$f_\xi(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_\xi(x_1, x_2, t_1 + s, t_2 + s).$$

Выбрав здесь  $s = t_1$ , получим

$$f_\xi(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_\xi(x_1, x_2, t_1 - t_1, t_2 - t_1) = f_\xi(x_1, x_2, t_1 - t_1, \tau), \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Мы видим, что двумерная плотность вероятности стационарного в узком смысле процесса не зависит от каждого из двух аргументов  $t_1, t_2$  отдельно, а зависит лишь от их разности  $\tau = t_2 - t_1$ . Выражение для ковариационной функции такого процесса приобретает вид:

$$R_\xi(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - a_\xi(t_1))(x_2 - a_\xi(t_2)) f_\xi(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - a_{\xi})(x_2 - a_{\xi}) f_{\xi}(x_1, x_2, t_2 - t_1) dx_1 dx_2 = R_{\xi}(t_2 - t_1) = R_{\xi}(\tau).$$

Теорема 2.1 доказана.

Случайный процесс  $\xi(t)$  называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а ковариационная функция зависит от разности своих аргументов.

Из доказанной выше теоремы следует, что из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле. Обратное утверждение в общем случае неверно. Обратное утверждение верно лишь в случае, когда процесс  $\xi(t)$  является нормальным (гауссовским). Гауссовский случайный процесс определен в п. 2.7.

Свойства 1–4 ковариационной функции случайного процесса, приведенные в п. 2.4, применительно к стационарному случайному процессу приобретают следующую форму:

$$\begin{aligned} 1) & R_{\xi}(\tau) = R_{\xi}(-\tau), \\ 2) & D_{\xi} = \sigma_{\xi}^2 = R_{\xi}(0), \\ 3) & R_{\xi}^2(\tau) \leq R_{\xi}^2(0), \text{ или } |R_{\xi}(\tau)| \leq R_{\xi}(0), \\ 4) & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{\xi}(t_i - t_j) x_i x_j \geq 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Эти свойства с очевидностью вытекают из указанных соответствующих свойств ковариационной функции общего (нестационарного) случайного процесса при замене  $\tau = t_2 - t_1$ .

В практических приложениях стационарных случайных процессов чаще всего используются ковариационные функции следующего вида:

$$R_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad (2.9)$$

$$R_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 (1 + \alpha|\tau|) e^{-\alpha|\tau|}, \quad (2.10)$$

$$R_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \left(1 + \alpha|\tau| + \frac{\alpha^2 \tau^2}{3}\right) e^{-\alpha|\tau|}, \quad (2.11)$$

$$R_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}, \quad (2.12)$$

$$R_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos(\omega\tau). \quad (2.13)$$

Графики ковариационных функций (2.9)–(2.13) для одних и тех же значений параметров  $\sigma_{\xi}^2$  и  $\alpha$  представлены на рис. 2.7.

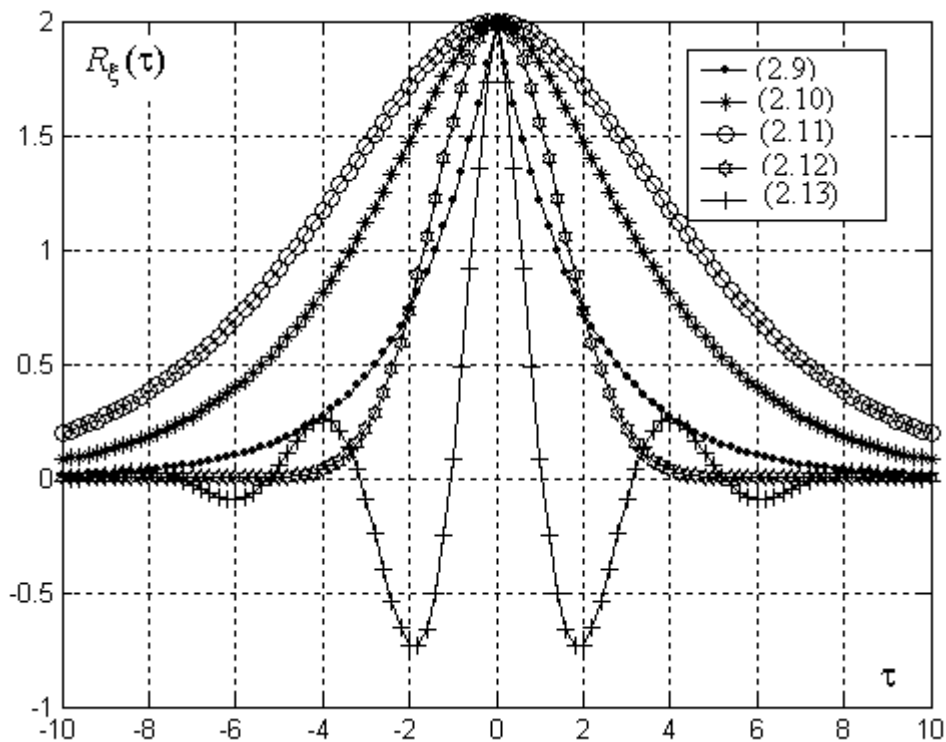


Рис. 2.7. Ковариационные функции (2.9)–(2.13) стационарных случайных процессов

Корреляционная функция стационарного случайного процесса имеет следующие свойства:

$$1) r_{\xi}(\tau) = r_{\xi}(-\tau),$$

$$2) r_{\xi}(0) = 1,$$

$$3) r_{\xi}(\tau) \leq 1,$$

$$4) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{\xi}(t_i - t_j) x_i x_j \geq 0.$$

Для стационарного случайного процесса корреляционная функция  $r_{\xi}(\tau)$  обычно убывает по модулю при увеличении  $\tau$ . В связи с этим вводится понятие

времени корреляции. Временем корреляции  $\tau_k$  стационарного случайного процесса называется промежуток времени между двумя сечениями процесса, в течение которого корреляционная функция по модулю затухает до величины  $\varepsilon$ . Положительное число  $\varepsilon$  выбирается из набора чисел 0,1; 0,05; 0,025. Время корреляции отмечено на рис. 2.8 на примере корреляционной функции (2.9).

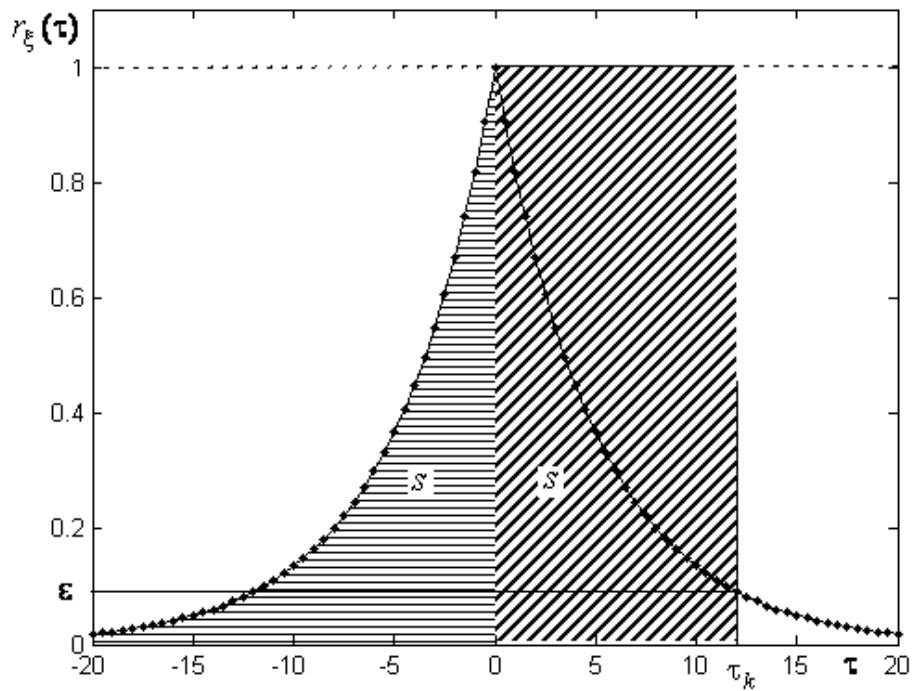


Рис. 2.8. Корреляционная функция (2.9) и время корреляции случайного процесса

Исходя из этого определения время корреляции определяется как решение относительно  $\tau$  уравнения

$$|r_{\xi}(\tau)| = \varepsilon.$$

Иногда время корреляции определяется соотношением

$$\tau_k = \int_0^{\infty} |r_{\xi}(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^0 |r_{\xi}(\tau)| d\tau.$$

В этом случае время корреляции представляет собой длину основания прямоугольника единичной высоты, площадь которого равна площади под кривой корреляционной функции на действительной полуоси (рис. 2.8). Равные площади отмечены на рис. 2.8 символом  $s$  и разнонаправленной штриховкой.

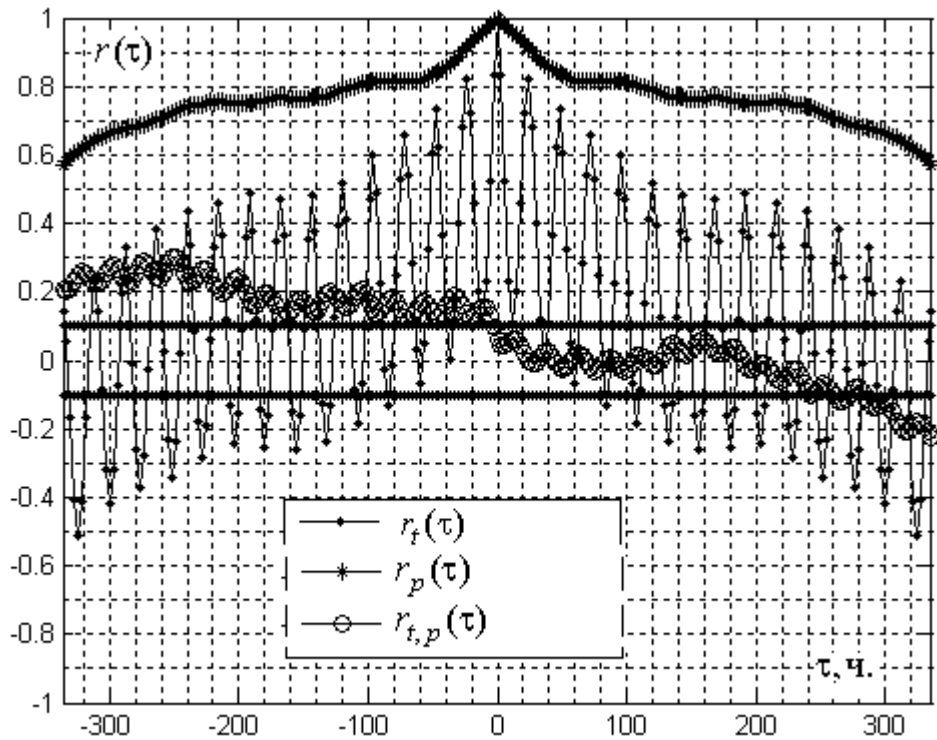


Рис. 2.9. Оценки корреляционных функций температуры воздуха ( $r_t(\tau)$ ), атмосферного давления ( $r_p(\tau)$ ) и их взаимной корреляционной функции  $r_{t,p}(\tau)$  на метеостанции Минск в июне

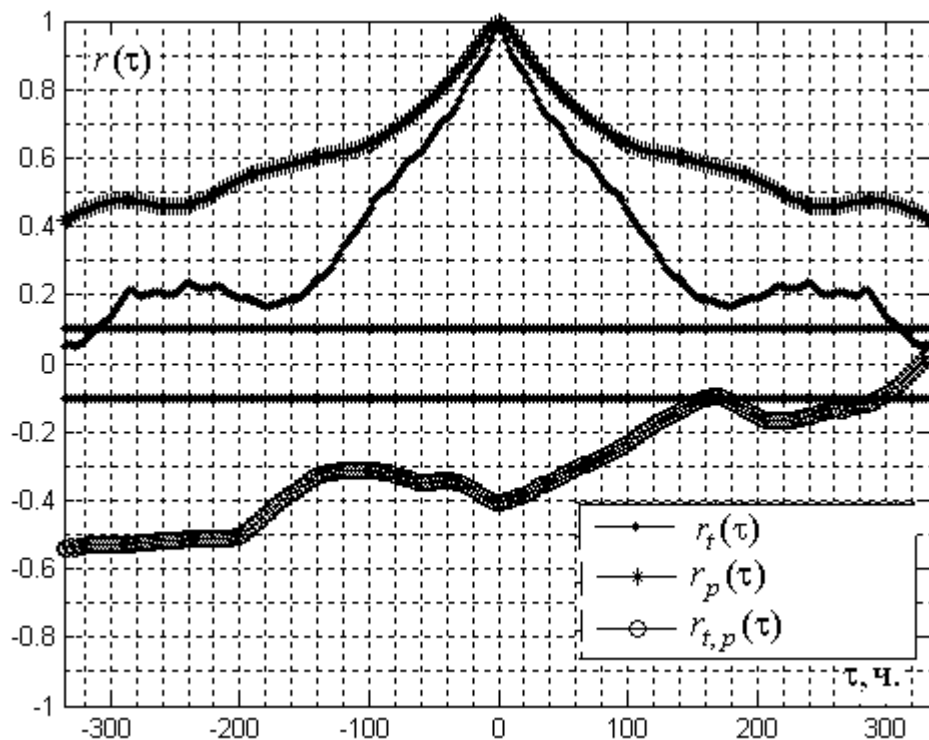


Рис. 2.10. Оценки корреляционных функций температуры воздуха ( $r_t(\tau)$ ), атмосферного давления ( $r_p(\tau)$ ) и их взаимной корреляционной функции  $r_{t,p}(\tau)$  на метеостанции Минск в январе

На рис. 2.9 и 2.10 представлены графики оценок корреляционных и взаимных корреляционных функций температуры воздуха и атмосферного давления на метеостанции Минск в июне и декабре, полученные по фактическим метеорологическим данным за последние 10 лет. Видно, что корреляционная функция температуры в июне имеет сильную периодическую составляющую, обусловленную суточными колебаниями температуры. В декабре периодическая составляющая отсутствует. Видно также, что атмосферное давление является более сильно коррелированным случайным процессом по сравнению с температурой.

*Пример 2.1.* Является ли стационарным случайный процесс  $\xi(t)$ , заданный в параметрической форме

$$\xi(t) = a \cos(\lambda t + \varphi), \quad (2.14)$$

где  $a$  и  $\lambda$  – фиксированные числа, а  $\varphi$  – случайная величина с равномерным распределением на  $[-\pi, \pi]$ ?

Для ответа на этот вопрос найдем математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса (2.14). Для математического ожидания получим

$$a_\xi(t) = E(\xi(t)) = E(a \cos(\lambda t + \varphi)) = a \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda t + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi = 0.$$

Ковариационную функцию будем искать как коэффициент ковариации сечений  $\xi(t)$  и  $\xi(t + \tau)$ . Тогда ковариационная функция должна быть функцией аргументов  $t$  и  $\tau$ . Получим

$$\begin{aligned} R_\xi(t, \tau) &= E(\xi(t)\xi(t + \tau)) = E(a \cos(\lambda t + \varphi)a \cos(\lambda(t + \tau) + \varphi)) = \\ &= a^2 E\left(\frac{1}{2} \cos((2t + \tau)\lambda + 2\varphi) + \frac{1}{2} \cos(\lambda\tau)\right) = \frac{a^2}{2} \cos(\lambda\tau), \end{aligned}$$

поскольку

$$E\left(\frac{1}{2} \cos((2t + \tau)\lambda + 2\varphi)\right) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((2t + \tau)\lambda + 2\varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi = 0.$$

Видим, что математическое ожидание постоянно (равно нулю), а ковариационная функция зависит лишь от длины промежутка времени  $\tau$  между сечениями. Следовательно, данный случайный процесс стационарен в широком смысле.

Для выяснения стационарности в узком смысле возьмем произвольный набор моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Тогда  $\xi(t_i) = a \cos(\lambda t_i + \varphi)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Возьмем теперь новый набор моментов времени  $t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau$ , сдвинутый относительно первого на величину  $\tau$ . В этом случае будем иметь сечения  $\xi(t_i + \tau) = a \cos(\lambda t_i + \varphi_1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $\varphi_1 = \varphi + \lambda\tau$ . Так как случайная величина  $\varphi$  распределена равномерно на  $[-\pi, \pi]$ , то случайная величина  $\varphi_1 = \varphi + \lambda\tau$  также распределена равномерно, но на другом интервале  $[-\pi + \lambda\tau, \pi + \lambda\tau]$ . Сравним распределения случайных величин  $\xi(t_i)$  и  $\xi(t_i + \tau)$ . Каждая из этих функций отображает интервал длиной  $2\pi$  (с равномерным распределением на нем) в интервал  $[-1, 1]$ . Следовательно,

$$P(a \cos(\lambda t_i + \varphi) < x) = P(a \cos(\lambda t_i + \varphi_1) < x),$$

что означает равенство распределений случайных величин  $\xi(t_i)$  и  $\xi(t_i + \tau)$ . Очевидно, что и совместное распределение случайных величин  $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$  будет таким же, как и случайных величин  $\xi(t_1 + \tau), \xi(t_2 + \tau), \dots, \xi(t_n + \tau)$ . Следовательно, случайный процесс (2.14) стационарен и в узком смысле.

## 2.7. Гауссовский (нормальный) случайный процесс

Случайный процесс  $\xi(t)$  называется гауссовским (нормальным), если все его конечномерные распределения гауссовские, т. е. если его  $n$ -мерная плотность вероятности определяется выражением

$$f_{\xi}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |R|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - A)^T R^{-1}(X - A)\right),$$

где  $A^T = (a_{\xi}(t_1), \dots, a_{\xi}(t_n))$  – вектор математических ожиданий процесса в моменты  $t_1, \dots, t_n$ ,  $X^T = (x_1, \dots, x_n)$  – вектор-строка аргументов плотности вероятности,  $R = (R_{i,j})$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , – ковариационная матрица процесса,  $|R|$  – определитель ковариационной матрицы,  $R^{-1}$  – матрица, обратная к матрице  $R$ .