

Тема 1. Моментные функции случайных процессов

1.1. Цель работы

1. Ознакомление с параметрической формой задания случайных процессов.

2. Приобретение навыков расчета математических ожиданий, дисперсий, ковариационных и взаимных ковариационных функций случайных процессов.

1.2. Теоретические положения

Математическое ожидание $a_\xi(t)$, дисперсия $d_\xi(t)$, ковариационная функция $R_\xi(t_1, t_2)$ случайного процесса $\xi(t)$ определяются выражениями:

$$a_\xi(t) = E(\xi(t)),$$

$$d_\xi(t) = E((\xi(t) - a_\xi(t))^2),$$

$$R_\xi(t_1, t_2) = E((\xi(t_1) - a_\xi(t_1))(\xi(t_2) - a_\xi(t_2))).$$

Взаимные ковариационные функции двух процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ определяются выражениями:

$$R_{\xi, \eta}(t_1, t_2) = E((\xi(t_1) - a_\xi(t_1))(\eta(t_2) - a_\eta(t_2))),$$

$$R_{\eta, \xi}(t_1, t_2) = E((\eta(t_1) - a_\eta(t_1))(\xi(t_2) - a_\xi(t_2))).$$

Здесь E – символ математического ожидания по соответствующему распределению.

Если случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ определены своими конечномерными плотностями вероятностей, то указанные моментные функции рассчитываются как следующие интегралы:

$$a_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x, t) dx, \quad a_\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\eta(x, t) dx,$$

$$d_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_{\xi}(t)) f_{\xi}(x, t) dx,$$

$$d_{\eta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_{\eta}(t)) f_{\eta}(x, t) dx,$$

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_{\xi}(t_1))(y - a_{\xi}(t_2)) f_{\xi}(x, y, t_1, t_2) dx dy,$$

$$R_{\eta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_{\eta}(t_1))(y - a_{\eta}(t_2)) f_{\eta}(x, y, t_1, t_2) dx dy,$$

$$R_{\xi, \eta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_{\xi}(t_1))(y - a_{\eta}(t_2)) f_{\xi, \eta}(x, y, t_1, t_2) dx dy,$$

$$R_{\eta, \xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_{\eta}(t_1))(y - a_{\xi}(t_2)) f_{\eta, \xi}(x, y, t_1, t_2) dx dy.$$

Здесь $f_{\xi}(x, t)$, $f_{\eta}(x, t)$ – одномерные плотности вероятностей случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ соответственно; $f_{\xi}(x, y, t_1, t_2)$, $f_{\eta}(x, y, t_1, t_2)$ – двумерные плотности вероятностей случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ соответственно; $f_{\xi, \eta}(x, y, t_1, t_2)$, $f_{\eta, \xi}(x, y, t_1, t_2)$ – взаимные двумерные плотности вероятностей случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ соответственно.

Если же случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ заданы в параметрической форме, т.е. в виде известных функций $\xi(t, \lambda)$ и $\eta(t, \mu)$ векторных случайных параметров $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$, то указанные моментные функции рассчитываются как следующие интегралы:

$$a_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t, z) f_{\lambda}(z) dz, \quad a_{\eta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t, v) f_{\mu}(v) dv,$$

$$d_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi(t, z) - a_{\xi}(t)) f_{\lambda}(z) dz,$$

$$d_{\eta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\eta(t, v) - a_{\eta}(t)) f_{\mu}(v) dv,$$

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi(t_1, z) - a_{\xi}(t_1))(\xi(t_2, z) - a_{\xi}(t_2)) f_{\lambda}(z) dz,$$

$$R_{\eta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} (\eta(t_1, v) - a_{\eta}(t_1))(\eta(t_2, v) - a_{\eta}(t_2)) f_{\mu}(v) dv,$$

$$R_{\xi, \eta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi(t_1, z) - a_{\xi}(t_1))(\eta(t_2, v) - a_{\eta}(t_2)) f_{\lambda, \mu}(z, v) dz dv,$$

$$R_{\eta, \xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta(t_1, v) - a_{\eta}(t_1))(\xi(t_2, z) - a_{\xi}(t_2)) f_{\lambda, \mu}(z, v) dz dv.$$

Здесь $f_{\lambda}(z)$, $f_{\mu}(v)$ – плотности вероятностей случайных векторов λ и μ соответственно; $f_{\lambda, \mu}(z, v)$ – совместная плотность вероятности случайных векторов λ и μ ; $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$; $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$; $dz = dz_1 dz_2 \dots dz_m$; $dv = dv_1 dv_2 \dots dv_k$.

Если случайные векторы λ и μ независимы, то $f_{\lambda, \mu}(z, v) = f_{\lambda}(z) f_{\mu}(v)$.

Как свойства приведенных выше интегралов легко могут быть получены следующие свойства моментных функций. Если $\zeta(t) = \xi(t) \pm \eta(t)$, то

$$a_{\zeta}(t) = a_{\xi}(t) \pm a_{\eta}(t),$$

$$d_{\zeta}(t) = d_{\xi}(t) + d_{\eta}(t) \pm 2R_{\xi, \eta}(t, t),$$

$$R_{\zeta}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1, t_2) + R_{\eta}(t_1, t_2) \pm R_{\xi, \eta}(t_1, t_2) \pm R_{\eta, \xi}(t_1, t_2).$$

Если случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ независимы, то в приведенных выше формулах $R_{\xi, \eta}(t_1, t_2) = R_{\eta, \xi}(t_1, t_2) = 0$.

Если случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ независимы и $\zeta(t) = \xi(t)\eta(t)$, то

$$a_{\zeta}(t) = a_{\xi}(t)a_{\eta}(t),$$

$$d_{\zeta}(t) = d_{\xi}(t)d_{\eta}(t),$$

$$R_{\zeta}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1, t_2)R_{\eta}(t_1, t_2).$$

Примерами случайных процессов являются метеорологические процессы (температура атмосферного воздуха, атмосферное давление, относительная влажность воздуха, направление и скорость ветра и др.)

1.3. Программные средства для выполнения работы

1.3.1. Символьное вычисление интегралов

Переменные или объекты объявляются в Matlab символьными с помощью функции **syms**. Например,

syms x1 x2 ... создает группу символьных объектов.

syms x1 x2 ... positive создает группу действительных положительных объектов.

syms x1 x2 ... real создает группу символьных объектов с вещественными значениями, т.е. с нулевой мнимой частью.

syms x1 x2 ... unreal создает группу чисто формальных символьных объектов без дополнительных свойств, т.е. страхует, чтобы эти объекты были ни действительными, ни положительными. Эту функцию можно использовать для отмены задания вещественных и положительных объектов.

Отметим, что символьные переменные в функции **syms** разделяются пробелами.

Пример 1.1. В результате выполнения программы

```
syms x1 x2 ... real
```

```
x=[x1,x2];
```

будут созданы символьные положительные скалярные переменные x_1 , x_2 и символьный массив (вектор-строка) x с положительными компонентами.

Для вычисления указанных в разделе 1.2 интегралов можно воспользоваться функцией символьного интегрирования **int**.

int(s) – возвращает символьное значение неопределенного интеграла от символьного выражения или массива символьных выражений s по переменной, которая автоматически определяется функцией **findsym**. Если s – константа, то вычисляется интеграл по переменной 'x';

int(s,a,b) – возвращает символьное значение определенного интеграла на отрезке интегрирования $[a,b]$ от символьного выражения или массива символьных выражений s по переменной, которая автоматически

определяется функцией **findsym**. Пределы интегрирования **a**, **b** могут быть как символьными, так и числовыми, как конечными, так и бесконечными (**inf**);

int(s,v) – возвращает символьное значение неопределенного интеграла от символьного выражения или массива выражений **s** по переменной **v**;

int(s,v,a,b) – возвращает символьное значение определенного интеграла от символьного выражения или массива символьных выражений **s** по переменной

v с пределами интегрирования [**a,b**].

Пример 1.2. Программа

```
syms alpha u
y2=int(sin(alpha*u),alpha)
```

возвращает следующий результат:

```
y2 =
-cos(alpha*u)/u
```

1.3.2. Символьные подстановки

Часто в символьное выражение вместо некоторых переменной или выражения необходимо подставить новую переменную или выражение. В Matlab это можно сделать с помощью функции **subs**.

y=subs(s,old,new) заменяет в символьном выражении **s** старую переменную или выражение **old** на новую переменную или выражение **new**.

Пример 1.3. Программа

```
syms t tau
y=sin(t);
y1=y*subs(y,t,t+tau)
```

возвращает следующий результат:

```
y1 =
sin(t)*sin(t+tau)
```

Отметим, что если все символьные переменные в символьном выражении s заменить на численные значения, то функция $y=\text{subs}(s,\text{old},\text{new})$ возвратит численный результат.

В качестве переменной **old** может использоваться символьный массив, а в качестве переменной **new** – символьный или численный массив.

1.3.3. Построение графиков функций одной переменной

Для построения графика функции одной переменной используется функция **plot**. Вызов этой функции осуществляется командой

plot(x,y,s)

где x , y – одномерные массивы одинаковой размерности; x – массив значений аргумента функции $y = f(x)$; y – массив значений функции $y = f(x)$; s – строковая константа, определяющая цвет линии, маркер узловых точек и тип линии. Эта константа может содержать от одного до трех символов.

Цвет линии определяется символами **y** (желтый), **m** (фиолетовый), **c** (голубой), **r** (красный), **g** (зеленый), **b** (синий), **w** (белый), **k** (черный).

Тип узловой точки определяется символами **.** (точка), **o** (окружность), **x** (крестик), **+** (плюс), ***** (звездочка), **s** (квадрат), **d** (ромб), **<** **>** **^** (треугольники различной направленности), **p** (пятиугольник), **h** (шестиугольник).

Тип линии определяется символами **-** (непрерывная), **:** (короткие штрихи), **-.** (штрих пунктир), **--** (длинные штрихи).

Символьную константу s можно опустить. В этом случае по умолчанию используется непрерывная линия желтого цвета.

Для построения в одном окне нескольких графиков можно использовать команду

plot(x1,y1,s1,x2,y2,s2,x3,y3,s3,...)

Команда **grid on** добавляет на график сетку. Команда **hold on** позволяет добавлять в то же графическое окно графики новых функций.

Пример 1.4.

```
x=0:0.1:2*pi;  
y1=sin(x);  
y2=cos(x);  
plot(x,y1,'k-o',x,y2,'r--*')  
grid on
```

Созданный с помощью программы **plot** график можно скопировать в буфер Clipboard, активизировав в пункте **Edit** главного меню графического окна команду **Copy Figure** с целью его дальнейшего редактирования в каком-либо графическом редакторе, например Paint.

1.3.4. Построение графиков функций двух переменных

Ковариационная функция нестационарного случайного процесса и взаимная ковариационная функция двух совместно нестационарных случайных процессов являются функциями двух переменных. Построение графика функции двух переменных $z = f(x, y)$ выполняется в Matlab с помощью функций **meshgrid** и **mesh**. Специфика построения таких графиков в Matlab требует не просто задания ряда значений x и y , т. е. векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} , а определения двумерных массивов \mathbf{X} и \mathbf{Y} . Для создания таких массивов служит функция **meshgrid**.

$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \text{meshgrid}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – преобразует область, заданную векторами \mathbf{x} и \mathbf{y} , в двумерные массивы \mathbf{X} и \mathbf{Y} , которые могут быть использованы для вычисления значений функции двух переменных и построения трехмерных графиков. Эта функция формирует массивы \mathbf{X} и \mathbf{Y} таким образом, что строки выходного массива \mathbf{X} являются копиями вектора \mathbf{x} , а столбцы выходного массива \mathbf{Y} – копиями вектора \mathbf{y} .

mesh(X,Y,Z,C) – выводит в графическое окно сетчатую поверхность с цветами узлов поверхности, заданных массивом \mathbf{C} .

mesh(X,Y,Z) – аналог предшествующей команды при $\mathbf{C} = \mathbf{Z}$ с использованием функциональной окраски, при которой цвет задается высотой поверхности.

Пример 1.5

```
[x,y]=meshgrid(-2:0.1:3,-4:0.1:4);  
z=x.^2+y.^2;  
mesh(x,y,z)
```

В результате выполнения этой программы на экран будет выведен график функции двух переменных $z = x^2 + y^2$.

В приведенном примере массив значений функции двух переменных формируется посредством использования поэлементных операций с массивами. Использование поэлементных операций предполагает наличие навыков их использования, т.е. четкого представления того, что происходит при их применении. Если уверенности в правильности использования поэлементных операций нет, то массив значений функции можно сформировать путем применения вложенных циклов **for** и индексированных переменных. Так, предыдущий пример можно оформить следующим образом:

```
x1=-2:0.1:3;  
y1=-4:0.1:4;  
[x,y]=meshgrid(x1,y1);  
nx=length(x1);  
ny=length(y1);  
for i=1:nx  
    for j=1:ny  
        z(j,i)=x1(i)^2+y1(j)^2;  
    end;  
end;  
mesh(x,y,z)
```

1.3.5. Моделирование случайных чисел

Случайные числа из равномерного распределения $u(a,b)$, плотность вероятности которого имеет вид

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \quad a, b \in R, \quad a < b, \\ 0, & x \leq a, \quad x \geq b, \end{cases}$$

моделируются с помощью функции $y = \text{unifrnd}(a, b)$.

Непрерывный случайный вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ называется распределенным по многомерному нормальному (гауссовскому) закону, если его плотность вероятности имеет вид

$$f_{\bar{\xi}}(X) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |R|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \varphi(X)\right),$$

где

$$\varphi(X) = (X - A)^T R^{-1} (X - A).$$

Здесь приняты следующие обозначения: $X^T = (x_1, \dots, x_m)$ – вектор-строка аргументов плотности вероятности; $A^T = (a_1, \dots, a_m)$ – вектор-строка параметров; $R = (R_{i,j}), i, j = \overline{1, m}$, – симметричная положительно определенная $(m \times m)$ -матрица параметров; R^{-1} – матрица, обратная матрице R ; $|R|$ – определитель матрицы R . Символ T означает транспонирование, так что X и A – векторы-столбцы. Параметры A и R распределения являются математическим ожиданием и ковариационной матрицей вектора $\bar{\xi}$ соответственно.

Если случайный вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ распределен по нормальному закону, то любой его подвектор (включая отдельную компоненту) также распределен по нормальному закону. Распределение этого подвектора получается вычеркиванием в исходном распределении из векторов $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, $A^T = (a_1, \dots, a_m)$ ненужных компонент и из матрицы R строк и столбцов, соответствующих ненужным компонентам.

Символически многомерное нормальное распределение обозначается как $f_{\bar{\xi}}(X) = N(A, R)$.

Если $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ – двухмерный случайный вектор, распределенный

по нормальному закону, то мы имеем

$$X^T = (x_1, x_2), \quad A^T = (a_1, a_2), \quad R = \begin{pmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} \\ R_{2,1} & R_{2,2} \end{pmatrix},$$

$$|R| = R_{1,1}R_{2,2} - R_{1,2}R_{2,1}, \quad R^{-1} = \frac{1}{|R|} \begin{pmatrix} R_{2,2} & -R_{1,2} \\ -R_{2,1} & R_{1,1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= (X - A)^T R^{-1} (X - A) = \\ &= R_{2,2}(x_1 - a_1)^2 - 2R_{1,2}(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + R_{1,1}(x_2 - a_2)^2. \end{aligned}$$

Если здесь обозначить $R_{1,1} = \sigma_1^2$, $R_{2,2} = \sigma_2^2$ и выразить коэффициент ковариации $R_{1,2} = R_{2,1} = \text{cov}(\xi_1, \xi_2)$ через коэффициент корреляции $r_{1,2}$ по формуле

$$R_{1,2} = R_{2,1} = r_{1,2}\sigma_1\sigma_2,$$

то функцию $\varphi(X)$ можно представить в виде

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{(1 - r_{1,2}^2)} \left(\frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r_{1,2} \frac{(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} \right),$$

а плотность вероятности двухмерного нормального распределения – в виде

$$f_{\xi}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1 - r_{1,2}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\varphi(x_1, x_2)\right).$$

Функция **r=mvnrnd(mu,sigma,cases)** возвращает матрицу **r** случайных чисел, выбранных из многомерного нормального распределения с вектором средних **mu** и ковариационной матрицей **sigma**. Параметр **cases** является количеством строк в **r** (количеством многомерных случайных чисел).

1.4. Порядок выполнения работы

1.4.1. Рассчитать функции математического ожидания, дисперсии и ковариационной функции случайного процесса $\zeta(t)$, выбранного из табл. 1.1

в соответствии со своим вариантом задания. Вид составляющих случайного процесса $\zeta(t)$ и распределения их параметров заданы в табл. 1.2. Параметры $\lambda = (b, c, d)$, φ , ω предполагаются случайными величинами, независимыми в совокупности. В символьных расчетах параметры b, c, d, φ, ω рассматривать как символьные переменные.

1.4.2. В одно графическое окно вывести 10 реализаций случайного процесса $\zeta(t)$ и функции математического ожидания и дисперсии, моделируя случайные значения параметров b, c, d, φ, ω и выбирая по своему усмотрению значения неслучайных параметров $a_b, a_c, a_d, A, B, \sigma^2, \sigma_b^2, \sigma_c^2, \sigma_d^2, \omega_1$ и интервал времени $t_0 \leq t \leq t_1$.

1.4.3. В отдельное графическое окно вывести график ковариационной функции случайного процесса $\zeta(t)$ при выбранных значениях неслучайных параметров $a_b, a_c, a_d, A, B, \sigma^2, \sigma_b^2, \sigma_c^2, \sigma_d^2, \omega_1$.

1.4.4. Оформить полученные результаты в виде отчета. Отчет должен содержать титульный лист с темой практического занятия, номером варианта и данными о студенте (ФИО, номер группы), исходные данные к варианту задания, коды написанных программ, численные и графические результаты работы программ, краткие выводы.

Таблица 1.1.

Варианты случайных процессов $\zeta(t)$ для расчетов

№ варианта	Процесс $\zeta(t)$	№ варианта	Процесс $\zeta(t)$
1	$\xi(t) + \eta(t)$	11	$\xi(t)\eta(t)$
2	$\xi(t) + \theta(t)$	12	$\xi(t)\theta(t)$
3	$\xi(t) + \psi(t)$	13	$\xi(t)\psi(t)$
4	$\xi(t) + \chi(t)$	14	$\xi(t)\chi(t)$
5	$\eta(t) + \theta(t)$	15	$\eta(t)\theta(t)$

6	$\eta(t) + \psi(t)$	16	$\eta(t)\psi(t)$
7	$\eta(t) + \chi(t)$	17	$\eta(t)\chi(t)$
8	$\theta(t) + \psi(t)$	18	$\theta(t)\psi(t)$
9	$\theta(t) + \chi(t)$	19	$\theta(t)\chi(t)$
10	$\psi(t) + \chi(t)$	20	$\psi(t)\chi(t)$

Таблица 1.2.

Составляющие случайного процесса $\zeta(t)$, заданного в табл. 1.1

№ процесса	Вид процесса	Случайный параметр	Обозначение распределения параметра
1	$\xi(t) = b$	b	$\lambda = (b, c, d),$ $f_\lambda(\bar{x}) = N(a_\lambda, R_\lambda),$ $a_\lambda = (a_b, a_c, a_d),$ $R_\lambda = \begin{bmatrix} \sigma_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_d^2 \end{bmatrix}$
2	$\eta(t) = ct$	c	
3	$\theta(t) = \sigma^2 \exp(-dt)$	d	
4	$\psi(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi)$	φ	$U(-a, a)$
5	$\chi(t) = B \cos \omega t$	ω	$U(0, a)$

1.5. Контрольные вопросы

1. Что такое случайный процесс (определение случайного процесса)?
2. Какие классы случайных процессов вы знаете?
3. Что такое конечномерные распределения случайного процесса?
4. Что такое математическое ожидание и дисперсия случайного процесса?
5. Что такое ковариационная функция случайного процесса?
6. Что такое взаимная ковариационная функция двух случайных процессов?
7. Какие свойства имеет ковариационная функция случайного процесса?

8. Какие свойства имеет взаимная ковариационная функция двух случайных процессов?

9. Запишите формулы для расчета моментных функций случайного процесса.

10. Объясните полученные графики реализаций, математического ожидания и дисперсии случайного процесса, основываясь на математической модели случайного процесса вашего варианта.

11. Объясните полученный график ковариационной функции случайного процесса исходя из свойств ковариационной функции.