

Тема 2. Моделирование дискретных случайных величин

2.1. Цель работы

1. Приобретение навыков моделирования полной группы случайных событий.
2. Приобретение навыков моделирования случайных чисел из дискретных распределений.

2.2. Теоретические положения

2.2.1. Моделирование полной группы случайных событий

Случайные события $A_i \subseteq F$, $P(A_i) = p_i$, $i = \overline{1, k}$, заданные на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , образуют полную группу событий, если выполняются условия:

$$\text{а) } \bigcup_{i=1}^k A_i = \Omega; \quad \text{б) } A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j; \quad \text{в) } P(A_i) \geq 0, \quad i = \overline{1, k}; \quad \text{г) } \sum_{i=1}^k P(A_i) = 1.$$

Для моделирования полной группы случайных событий будем использовать базовую случайную величину α , т.е. непрерывную случайную величину, распределенную равномерно в интервале $(0,1)$. По вероятностям p_i случайных событий A_i определим числа

$$S_0 = 0, \quad S_i = \sum_{j=1}^i p_j, \quad (2.1)$$

а события A_i определим как следующие множества:

$$A_i = (S_{i-1} \leq \alpha < S_i), \quad i = \overline{1, k}. \quad (2.2)$$

Построенные таким образом события удовлетворяют сформулированным выше условиям а) – г). Действительно,

$$P(A_i) = \int_{S_{i-1}}^{S_i} f_{\alpha}(x) dx = \int_{S_{i-1}}^{S_i} dx = S_i - S_{i-1} = p_i, \quad i = \overline{1, k}.$$

Алгоритм, моделирующий отдельное случайное событие A_i (его номер i), состоит в выполнении следующих шагов.

1. Расчет чисел S_0, S_1, \dots, S_k по формуле (2.1).
2. Обращение к датчику базового случайного числа и получение псевдослучайного числа α .
3. Сравнение α с величинами S_0, S_1, \dots, S_k и выбор номера события i , удовлетворяющего условию (2.2).

Для моделирования результатов n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться одно из событий A_1, A_2, \dots, A_k , пункты 2, 3 алгоритма необходимо повторить n раз.

2.2.2. Моделирование случайных чисел из дискретных распределений

Пусть ξ – дискретная случайная величина, принимающая значения x_1, x_2, \dots, x_k с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_k . Моделировать значения этой случайной величины можно с помощью алгоритма моделирования полной группы случайных событий, изложенного в п. 2.2.1. Действительно, между значениями x_i дискретной случайной величины и случайными событиями A_i полной группы событий, $i = \overline{1, k}$, существует взаимно-однозначное соответствие. Поэтому для моделирования дискретной случайной величины ξ к алгоритму, приведенному в п. 2.2.1, следует добавить четвертый пункт.

4. Выбор значения случайной величины x по полученному номеру i случайного события: $y_j = x_i, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}$.

2.3. Программные средства для выполнения работы

Случайное число из равномерного в промежутке (0,1) распределения моделируется с помощью функции **unifrnd**. Команда **y=unifrnd(a,b)** выдает случайное число из равномерного в промежутке (a,b) распределения.

Моделировать случайные числа (выборки) из дискретных распределений в Matlab позволяет функция **randsample**.

y=randsample(k,n) возвращает $(1 \times n)$ -вектор значений без повторений **y**, выбранных из дискретного распределения с равновозможными значениями $1,2,\dots,k$. При отсутствии повторений **n** должно быть меньше или равно **k**.

Пример 2.1. Программа

```
y=(randsample(10,8))'
```

выдает результат

y =

```
4 3 6 9 7 10 8 2
```

y=randsample(population,n) возвращает **n** значений без повторений в **y**, выбранных из дискретного распределения с равновозможными значениями, определенными в **population**. При таком обращении к функции **randsample** ее параметры **population** и **y** являются символьными массивами (строками символов). Здесь также должно быть $n \leq k$, где **k** – число символов в символьной строке **population**.

Пример 2.2. Программа

```
population='abcdefghij'
```

```
y=randsample(population,8)
```

выдает результат

population =

```
abcdefghij
```

y = edfcgiba

y=randsample(...,replace) возвращает выборку с повторениями, если параметр **replace** равен **true**, или без повторений, если параметр **replace** равен **false** (по умолчанию).

Пример 2.3. Программа

```
population='abcdefghij'
```

```
y=randsample(population,12,true)
```

выдает результат

```
population =  
abcdefghij  
y =  
ebghdaehhjid
```

y=randsample(...,true,w) возвращает выборку с повторениями из распределения, заданного вектором вероятностей **w** и строкой значений **population**. Этот вариант обращения не поддерживает выбор без повторения.

Пример 2.4. Программа

```
population='abcde'  
w=[0.1 0.3 0.5 0.02 0.08];  
y=randsample(population,12,true,w)
```

выдает результат

```
population =  
abcde  
y =  
сссееabcбсас
```

Замечание. Использование функции **randsample** в виде

y=randsample(n,k,true,w)

позволяет моделировать выборки из произвольных дискретных распределений с числовыми значениями $1, 2, \dots, k$. При необходимости моделирования выборки из распределения с произвольными числовыми значениями x_1, x_2, \dots, x_k полученный вектор $y = (y_j)$ необходимо пересчитать в вектор $z = (z_j)$ по формуле $z_j = x_{y_j}$, $j = \overline{1, n}$.

2.4. Порядок выполнения работы

2.4.1. Написать m-файл-функцию для моделирования полной группы случайных событий. Входными параметрами этой функции должен быть вектор вероятностей случайных событий $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ и количество

независимых испытаний n , а выходным – вектор смоделированной последовательности событий $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

2.4.2. Использовать написанную в п. 2.4.1 функцию для моделирования последовательности независимых испытаний для случайных событий. В качестве вектора вероятностей случайных событий взять вектор p из табл. 2.1. По достаточно большой последовательности испытаний рассчитать оценки вероятностей этих событий.

2.4.3. Написать m-файл-функцию для моделирования выборки объема n из дискретного распределения с возможными значениями $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ и их вероятностями $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$. Входными параметрами функции должны быть векторы $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ и объем выборки n , а выходным – выборка возможных значений $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. В этой функции использовать функцию, написанную в п. 2.4.1.

2.4.4. Использовать написанную в п. 2.4.2 функцию для моделирования выборки из дискретного распределения, приведенного в табл. 2.1. По выборке достаточно большого объема рассчитать оценки среднего значения и дисперсии дискретного распределения и сравнить их с соответствующими теоретическими характеристиками.

2.4.5. Оформить полученные результаты в виде отчета. Отчет должен содержать титульный лист с темой практического занятия, номером варианта и данными о студенте (ФИО, номер группы), исходные данные к варианту задания, коды написанных программ, смоделированные при их работе последовательности событий и чисел и рассчитанные значения, краткие выводы.

Таблица 2.1.

Варианты заданий для моделирования случайных событий
и дискретных случайных величин

№ варианта	Вектор вероятностей p , вектор значений x	№ варианта	Вектор вероятностей p , вектор значений x
1	$p = (0.1 \ 0.6 \ 0.3)$ $x = (1 \ 6 \ 3)$	11	$p = (0.2 \ 0.3 \ 0.5)$ $x = (0 \ 1 \ -1)$
2	$p = (0 \ 0.5 \ 0.5)$ $x = (-1 \ 1 \ 2)$	12	$p = (0.5 \ 0.5 \ 0)$ $x = (1 \ 3 \ 4)$
3	$p = (0.3 \ 0.3 \ 0.4)$ $x = (2 \ 1 \ -1)$	13	$p = (0.2 \ 0.3 \ 0.5)$ $x = (0 \ 1 \ -1)$
4	$p = (0 \ 0.3 \ 0.7)$ $x = (-1 \ 0 \ 1)$	14	$p = (0.3 \ 0 \ 0.7)$ $x = (-2 \ -1 \ 0)$
5	$p = (0.3 \ 0.7 \ 0)$ $x = (5 \ 6 \ 7)$	15	$p = (0.2 \ 0.4 \ 0.4)$ $x = (5 \ 4 \ 3)$
6	$p = (0.4 \ 0.2 \ 0.4)$ $x = (2 \ 3 \ 4)$	16	$p = (0.4 \ 0.2 \ 0.4)$ $x = (-3 \ -2 \ -1)$
7	$p = (0 \ 0.4 \ 0.6)$ $x = (0 \ 1 \ 2)$	17	$p = (0.2 \ 0.3 \ 0.5)$ $x = (-1 \ 0 \ 1)$
8	$p = (0 \ 0.4 \ 0.6)$ $x = (-1 \ 0 \ 3)$	18	$p = (0 \ 0.2 \ 0.8)$ $x = (1 \ -1 \ 0)$
9	$p = (0 \ 0.2 \ 0.8)$ $x = (1 \ -1 \ 0)$	19	$p = (0 \ 0.2 \ 0.8)$ $x = (1 \ -1 \ 0)$
10	$p = (0.1 \ 0.7 \ 0.2)$ $x = (-3 \ -4 \ -5)$	20	$p = (0.6 \ 0 \ 0.4)$ $x = (1 \ 2 \ 5)$

2.5. Контрольные вопросы

1. Что такое вероятностное пространство?
2. Что такое полная группа случайных событий?
3. Что такое случайная величина (определение случайной величины)?
4. Что такое закон распределения случайной величины?
5. Каким образом конструктивно задается закон распределения непрерывной, дискретной случайной величины?
6. Как найти среднее значение (математическое ожидание) и дисперсию случайной величины?
7. Как получить оценки среднего значения (математического ожидания) и дисперсии случайной величины?
8. Что такое моменты случайной величины?