Кривые и поверхности второго порядка

Пример 1. Составить уравнение окружности, зная, что она касается оси OY в точке $A(0;-3)$ и имеет радиус $r=2$.

Δ Очевидно, центр окружности находится в точке $O_1(-2;-3)$ или $O_2(2;-3)$. Соответственно уравнения этих окружностей:

$(x+2)^2+(y+3)^2=4,\ (x-2)^2+(y+3)^2=4$. ▲

Пример 2. Дана окружность $(x-1)^2+(y-2)^2=25$. Составить уравнение ее касательной в точке $A(5;5)$.

Δ Запишем уравнение прямой O_1A, где $O_1(1;2)$ – центр окружности:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{3}.$$

Касательная к окружности проходит через точку $A(5;5)$ и имеет нормальный вектор $\overline{n}=(4;3)$. Ее уравнение: $4(x-5)+3(y-5)=0$, $4x+3y-35=0$. ▲

Пример 3. Определить тип кривой $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$.

Δ $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0\ \sim\ (x+A)^2+(y+B)^2=A^2+B^2-C$. Если $A^2+B^2-C>0$ – окружность, $A^2+B^2-C=0$ – точка, то $A^2+B^2-C<0$ – $\varnothing$. ▲

Пример 4. Найти длины полуосей, эксцентриситет, координаты фокусов, составить уравнения директрис эллипса:

1) $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{12^2}+\dfrac{y^2}{13^2}=1$.

Δ 1) Большая полуось равна 5, малая полуось равна 4;

Эксцентриситет: $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{25-16}}{5}=\dfrac{3}{5}$;

координаты фокусов: $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, т. е. $F_1(3;0)$ и $F_2(-3;0)$;

уравнение директрис: $x=\pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=\pm\dfrac{25}{3}$.

2) Большая полуось равна 13, малая полуось равна 12;

Эксцентриситет: $\varepsilon=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{169-144}}{13}=\dfrac{5}{13}$;

координаты фокусов: $F_1(0;c)$ и $F_2(0;-c)$, т. е. $F_1(0;5)$ и $F_2(0;-5)$;

уравнение директрис: $y=\pm\dfrac{b^2}{\sqrt{b^2-a^2}}=\pm\dfrac{169}{5}$. ▲

Пример 5. Определить, какая линия определяется следующим уравнением:

$$x=-5+\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}.$$

Изобразить ее на чертеже.

Δ Преобразуем заданное уравнение:

$$x=-5+\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}\,,\quad \begin{cases}9(x+5)^2-4(8+2y-y^2)=0,\\ x\geq -5,\end{cases}$$

$$\begin{cases}9(x+5)^2+4(y^2-2y-8)=0,\\ x\geq -5,\end{cases}\qquad \begin{cases}9(x+5)^2+4(y-1)^2=36,\\ x\geq -5,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x+5)^2}{2^2}+\dfrac{(y-1)^2}{3^2}=1,\\ x\geq -5.\end{cases}$$

Это правая половина эллипса с центром в $M_0(-5;1)$ и полуосями $a=2$ и $b=3$ (рис. 8).

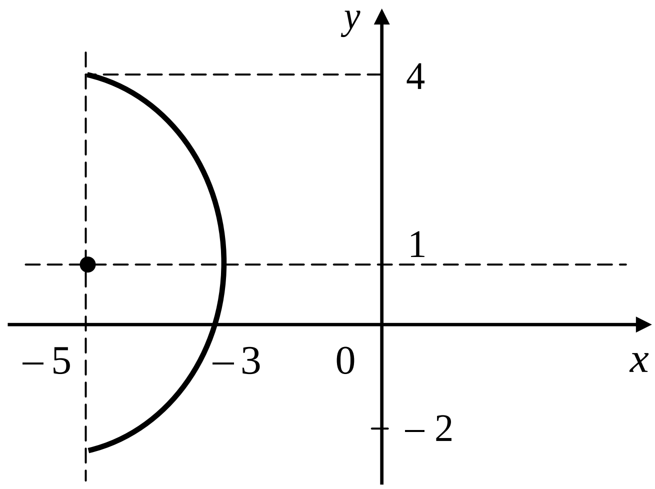


Рис. 8

Пример 6. В данной системе координат эллипс имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

1) расстояние между вершинами, лежащими на большой оси, равно 16, а расстояние между фокусами равно 10;

2) хорда, соединяющая две вершины эллипса, имеет длину 5 и наклонена к его большой оси под углом $\arcsin\dfrac{3}{5}$;

3) фокусами эллипса являются точки $(\pm 1;\,0)$, а точка $\left(\sqrt{3};\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ принадлежит эллипсу;

4) фокусами эллипса являются точки $(\pm 2;\,0)$, а директрисами являются прямые $x=\pm 18$;

5) расстояние от директрисы до ближайшей вершины равно 4, а до вершины, лежащей на оси OY, равно 8.

Δ 1) $\begin{cases} 2a = 16, \\ 2c = 10, \end{cases}$ $\begin{cases} a = 8, \\ c = 5, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 64, \\ b^2 = a^2 - c^2 = 39. \end{cases}$

Уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{39} = 1.$

2) $b = 5 \cdot \dfrac{3}{5} = 3,$ $a = \sqrt{25 - 9} = 4$. Уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1;$

3) $\begin{cases} c = 1, \\ \dfrac{3}{a^2} + \dfrac{3}{4b^2} = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 - b^2 = 1, \\ \dfrac{3}{1 + b^2} + \dfrac{3}{4b^2} = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 - b^2 = 1, \\ 4b^4 - 11b^2 - 3 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} b^2 = 3, \\ a^2 = 4. \end{cases}$

Уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1.$

4) $\begin{cases} c = 2, \\ \dfrac{a^2}{c} = 18, \end{cases}$ $\begin{cases} c = 2, \\ a^2 = 36, \end{cases}$ $\begin{cases} c^2 = 4, \\ a^2 = 36, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 36, \\ b^2 = a^2 - c^2 = 32. \end{cases}$

Уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{32} = 1.$

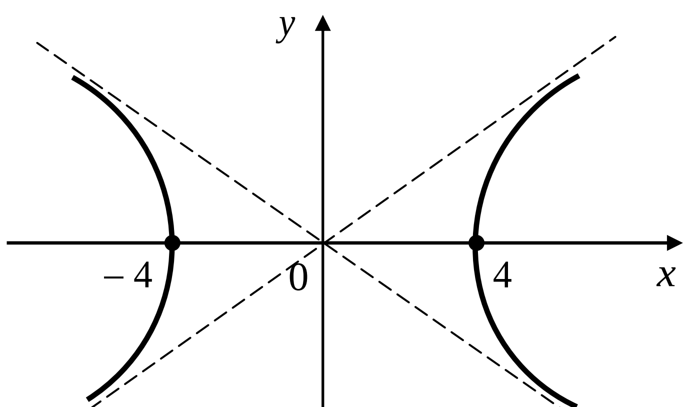
5) $\begin{cases} \dfrac{a^2}{c} - a = 4, \\ \dfrac{a^2}{c} = 8, \end{cases}$ $\begin{cases} a = 4, \\ c = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 16, \\ b^2 = a^2 - c^2 = 12. \end{cases}$

Уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1.$ ▲

Пример 7. Найти полуоси, эксцентриситет, координаты фокусов, составить уравнения директрис и асимптот гиперболы $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. Начертить ее график.

Δ $\begin{cases} a^2 = 16, \\ b^2 = 9, \end{cases}$ $\begin{cases} a = 4, \\ b = 3. \end{cases}$

Действительная полуось равна 4, мнимая полуось равна 3; эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \dfrac{5}{4}$; координаты фокусов: $F_1(c; 0)$ и $F_2(-c; 0)$, т. е. $F_1(5; 0)$ и $F_2(-5; 0)$; уравнения директрис: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm\dfrac{4}{5/4} = \pm\dfrac{16}{5}$; уравнения асимптот: $y = \pm\dfrac{b}{a}x = \pm\dfrac{3}{4}x$. График гиперболы изображен на рис. 9.



Пример 8. В данной системе координат гипербола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

1) расстояние между вершинами равно 10, а расстояние между фокусами равно 12;

2) длина вещественной оси равна 1, а точка $(1;\ 3)$ принадлежит гиперболе;

3) длина мнимой полуоси равна 1, а вершина гиперболы делит расстояние между фокусами в отношении $4:1$;

4) эксцентриситет гиперболы равен $\frac{7}{5}$, а расстояние от вершины до ближайшего фокуса равно 2.

Δ 1) $\begin{cases} 2a = 10, \\ 2c = 12, \end{cases}$ $\begin{cases} a = 5, \\ c = 6, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 25, \\ a^2 + b^2 = 36, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 25, \\ b^2 = 11. \end{cases}$

Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1.$

2) $\begin{cases} 2a = 1, \\ \frac{1}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = \frac{1}{4}, \\ -\frac{9}{b^2} = -3, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = \frac{1}{4}, \\ b^2 = 3. \end{cases}$

Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{1/4} - \frac{y^2}{3} = 1.$

3) $\begin{cases} b = 1, \\ \frac{2a + c}{c - a} = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1, \\ 3c = 6a, \end{cases}$ $\begin{cases} b^2 = 1, \\ a^2 + b^2 = 4a^2, \end{cases}$ $\begin{cases} b^2 = 1, \\ a^2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{1/3} - \frac{y^2}{1} = 1.$

4) $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{7}{5}, \\ c - a = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} 5c - 7a = 0, \\ c - a = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} a = 5, \\ c = 7, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 25, \\ a^2 + b^2 = 49, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 25, \\ b^2 = 24. \end{cases}$

Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1.$ ▲

Пример 9. В данной системе координат парабола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

1) точка $(5;-5)$ принадлежит параболе;

2) расстояние от фокуса до директрисы равно 12;

3) длина хорды, проходящей через фокус под углом $45°$ к оси параболы, равна 18.

Δ 1) Подставив координаты точки $(5;-5)$ в каноническое уравнение параболы, получим: $25 = 2p \cdot 5,\ p = 2{,}5$. Уравнение параболы: $y^2 = 5x$.

2) $\frac{p}{2} - \left(-\frac{p}{2}\right) = p = 12$. Уравнение параболы: $y^2 = 24x$.

3) Запишем уравнение прямой AB: $y = x - \frac{p}{2}$. Имеем $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = 2px,$

$x^2 - 3px + \frac{p^2}{4} = 0$. Так как $x_1 + x_2 = 3p$ и $AF + BF = AC + BD = x_1 + x_2 + p$, то $4p = 18,$ $2p = 9$.

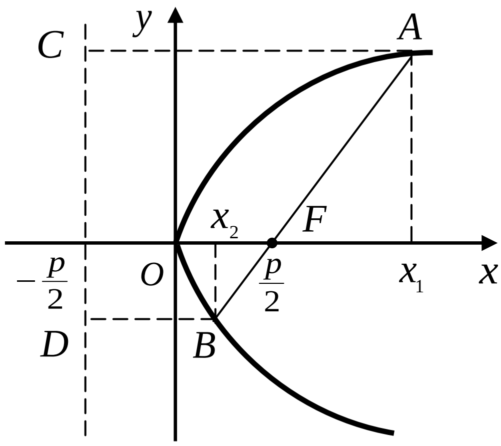


Рис. 10

Уравнение параболы: $y^2 = 9x$ (рис. 10). ▲

Пример 10. Составить уравнение параболы с параметром p, вершина которой имеет координаты $(a; b)$, а направление оси совпадает:

1) с положительным направлением оси OX;

2) с отрицательным направлением оси OX;

3) с положительным направлением оси OY;

4) с отрицательным направлением оси OY.

Δ 1) $(y-b)^2 = 2p(x-a)$;

2) $(y-b)^2 = 2p(a-x)$;

3) $(x-a)^2 = 2p(y-b)$;

4) $(x-a)^2 = 2p(b-y)$. ▲

Пример 11. Составить уравнение параболы с вершиной $A(2;1)$ и директрисой $2x - y + 2 = 0$.

Δ Найдем проекцию точки A на директрису параболы:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-1}, \\ 2x - y + 2 = 0, \end{cases} \qquad A'(0;\,2).$$

Пусть координаты фокуса параболы $F(x; y)$.

$$\text{Тогда} \begin{cases} \dfrac{x+0}{2} = 2, \\ \dfrac{y+2}{2} = 1, \end{cases} \qquad F(4;\,0).$$

Возьмем любую точку $M\,(x;\,y)$, принадлежащую параболе. Расстояние от этой точки до директрисы равно $\dfrac{|2x-y+2|}{\sqrt{5}}$, а от этой точки до фокуса параболы – $\sqrt{(x-4)^2+y^2}$. Согласно определению параболы $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\dfrac{|2x-y+2|}{\sqrt{5}}$, $5(x^2-8x+16)+5y^2=4x^2+y^2+4-4xy+8x-4y$, $x^2+4y^2+4xy-48x+$ $+4y+76=0$. ▲

Пример 12. Написать каноническое уравнение кривой второго порядка $r=\dfrac{9}{5-4\cos\varphi}$.

Δ Так как $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то из полярного уравнения кривой имеем:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9}{5-4\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}},\quad \sqrt{x^2+y^2}=\frac{9\sqrt{x^2+y^2}}{5\sqrt{x^2+y^2}-4x},$$

$$5\sqrt{x^2+y^2}=9+4x,\quad \begin{cases}25(x^2+y^2)=81+72x+16x^2,\\ x\ge -\dfrac{9}{4},\end{cases}$$

$$\begin{cases}9x^2-72x+25y^2-81=0,\\ x\ge -\dfrac{9}{4},\end{cases}\qquad \begin{cases}9(x-4)^2-144+25y^2-81=0,\\ x\ge -\dfrac{9}{4},\end{cases}$$

$$\begin{cases}9(x-4)^2+25y^2=225,\\ x\ge -\dfrac{9}{4},\end{cases}\qquad \begin{cases}9x'^2+25y'^2=225,\\ x'\ge -\dfrac{25}{4},\end{cases}$$

$9x'^2+25y'^2=225$, $\dfrac{x'^2}{25}+\dfrac{y'^2}{9}=1$ – уравнение эллипса. ▲

Пример 13. Семейство поверхностей задано уравнением, содержащим произвольный параметр λ. Определить тип поверхности при всевозможных λ:

а) $x^2+y^2+z^2=\lambda$; б) $\lambda x^2+y^2+z^2=1$; в) $\lambda x^2+y^2+z^2=\lambda$;

г) $x^2+y^2-z^2=\lambda$; д) $x^2-y^2-z^2=\lambda$; е) $x^2+\lambda(y^2+z^2)=1$;

ж) $x^2+\lambda(y^2+z^2)=\lambda$; з) $x^2+y^2=\lambda z$.

Δ а) При $\lambda>0$ – эллипсоид, при $\lambda=0$ – точка, при $\lambda<0$ – Ø; б) при $\lambda>0$ – эллипсоид, при $\lambda=0$ – эллиптический цилиндр, при $\lambda<0$ – однополостный гиперболоид; в) при $\lambda>0$ – эллипсоид, при $\lambda=0$ – прямая, при $\lambda<0$

– двуполостный гиперболоид; г) при $\lambda > 0$ – однополостный гиперболоид, при $\lambda = 0$ – конус, при $\lambda < 0$ – двуполостный гиперболоид; д) при $\lambda > 0$ – двуполостный гиперболоид, при $\lambda = 0$ – конус, при $\lambda < 0$ – однополостный гиперболоид; е) при $\lambda > 0$ – эллипсоид, при $\lambda = 0$ пара параллельных плоскостей, при $\lambda < 0$ – двуполостный гиперболоид; ж) при $\lambda > 0$ – эллипсоид, при $\lambda = 0$ – плоскость, при $\lambda < 0$ – однополостный гиперболоид; з) при $\lambda \neq 0$ – эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ – прямая. ▲

Пример 14. Определить тип поверхности:

а) $2x^2 + y^2 - 3z^2 - 4x + 4y + 6 = 0$;

б) $2x^2 - y^2 + 2z + 1 = 0$;

в) $2x^2 + z^2 + 2x + z = 0$.

Δ а) $2x^2 + y^2 - 3z^2 - 4x + 4y + 6 = 0$, $2(x-1)^2 - 2 + (y+2)^2 - 4 - 3z^2 + 6 = 0$, $2(x-1)^2 + (y+2)^2 - 3z^2 = 0$ – конус;

б) $2x^2 - y^2 + 2z + 1 = 0$, $2\left(z + \frac{1}{2}\right) = y^2 - 2x^2$ – гиперболический параболоид;

в) $2x^2 + z^2 + 2x + z = 0$, $2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$,

$2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ – эллиптический цилиндр. ▲

Пример 15. Методом сечений установить форму однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$. Сделать рисунок.

Δ Будем пересекать поверхность плоскостями $y = h$ (рис. 11):

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{z^2}{4^2} = 1 + \dfrac{h^2}{3^2}, \\ y = h, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(2\sqrt{1+\dfrac{h^2}{3^2}}\right)^2} + \dfrac{z^2}{\left(4\sqrt{1+\dfrac{h^2}{3^2}}\right)^2} = 1, \\ y = h. \end{cases}$$

В любом таком сечении получается эллипс с полуосями $a_1 = 2\sqrt{1+\frac{h^2}{3^2}}$ и $b_1 = 4\sqrt{1+\frac{h^2}{3^2}}$. Сечения плоскостями $x = h$ и $z = h$ дает соответственно гиперболы

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1 - \dfrac{h^2}{2^2}, \\ x = h \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1 - \dfrac{h^2}{4^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

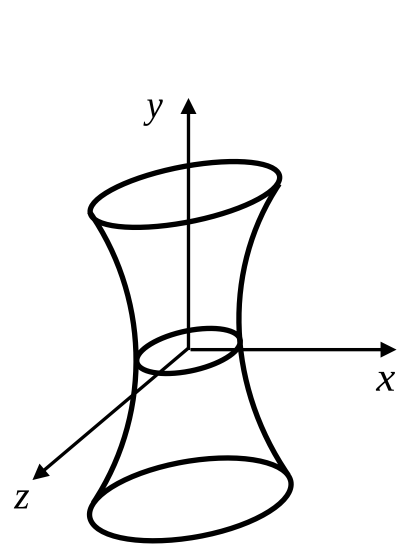


Рис. 11

Сечения плоскостями $x = \pm 2$ и $z = \pm 4$ дают пару пересекающихся прямых. При $h = 0$ получим сечения поверхности координатными плоскостями. Эти сечения называются главными.

В плоскости $y = 0$ эллипс имеет полуоси $a = 2$ и $c = 4$. В плоскости $x = 0$ гипербола имеет действительную полуось $c = 4$ и мнимую полуось $b = 3$. В плоскости $z = 0$ гипербола имеет действительную полуось $a = 2$ и мнимую полуось $b = 3$. ▲

Пример 16. Установить, при каких значениях m плоскость $x + mz - 1 = 0$ пересекает двуполостный гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = -1$: а) по эллипсу, б) по гиперболе.

∆ Сечение гиперболоида плоскостью $x = 1 - mz$ представляет собой кривую:

$$(1 - mz)^2 + y^2 - z^2 = -1,\ 1 - 2mz + m^2z^2 + y^2 - z^2 = -1,$$

$$y^2 + (m^2 - 1)\left(z - \frac{m}{m^2 - 1}\right)^2 = \frac{2 - m^2}{m^2 - 1},\ \ (|m| \neq 1).$$

Кривая будет представлять эллипс, если $\begin{cases} m^2 - 1 > 0, \\ 2 - m^2 > 0, \end{cases}$ $1 < |m| < \sqrt{2}$.

Кривая будет представлять гиперболу, если $\begin{cases} m^2 - 1 < 0, \\ 2 - m^2 \neq 0, \end{cases}$ $|m| < 1$.

При $m = \pm 1$ в сечении получим параболу $z = \pm \dfrac{y^2 + 2}{2}$. ▲

Дополнительные задачи

1. Составить уравнение линии, расстояние от каждой точки которой до точки $A(-1;\,0)$ вдвое меньше расстояния до прямой $x = -4$.

Ответ: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{12} = 1.$

2. Составить уравнение линии, расстояние от каждой точки которой до точки $A(2;\,0)$ и до прямой $5x + 8 = 0$ относятся как $5:4$.

Ответ: $\dfrac{(x-8)^2}{8^2} - \dfrac{y^2}{24^2} = 1.$

3. Составить уравнение линии, каждая точка которой одинаково удалена от точки $A(0;\,2)$ и от прямой $y = 4$.

Ответ: $x^2 = -4(y - 3)$.

4. Установить, какие кривые определяются нижеследующими уравнениями:

а) $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$; б) $\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{9}y^2 - x + \dfrac{2}{3}y - 1 = 0$;

в) $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$.

Построить чертежи.

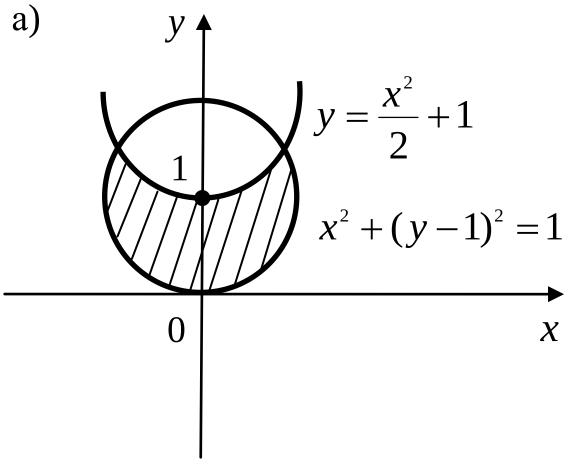
Ответ: а) эллипс $\frac{x'^2}{225}+\frac{y'^2}{16}=1$, новое начало координат $0'(1;-1)$; б) гипербола $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{9}=1$, новое начало координат $0'(2;3)$; в) парабола $x'^2=-y'$, новое начало $0'\left(1;\frac{5}{2}\right)$.

5. Изобразить множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим условиям:

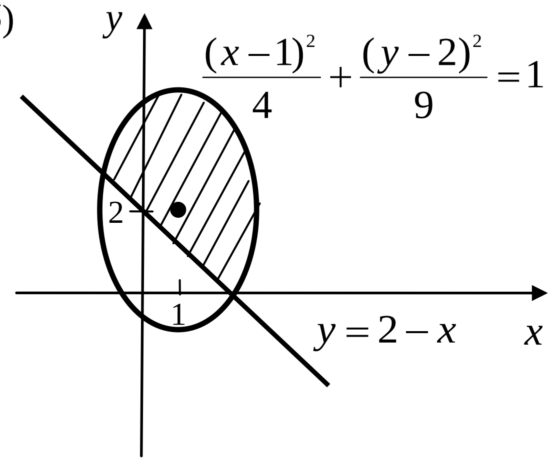
а) $\begin{cases} x^2+y^2\le 2y, \\ x^2+2\ge 2y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}\le 1, \\ x+y\ge 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2y>\sqrt{x^2+4}, \\ y<\sqrt{x+4}. \end{cases}$

Ответ:

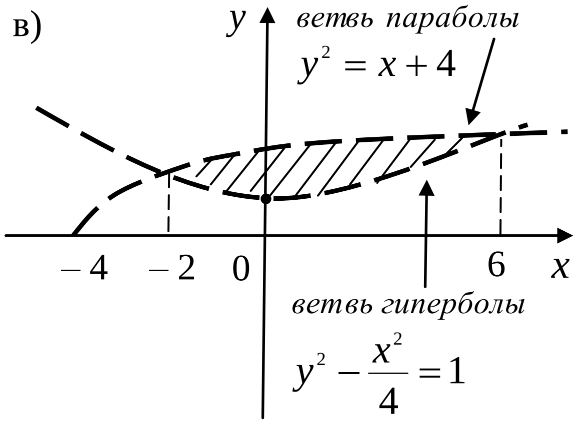
а)



б)



в)



6. Написать каноническое уравнение кривой $r=\frac{9}{4-5\cos\varphi}$.

Ответ: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Правая ветвь гиперболы.

7. Установить, какие кривые заданы уравнениями в полярных координатах:

а) $r=\frac{15}{3-7\cos\varphi}$; б) $r=\frac{7}{5-2\cos\varphi}$; в) $r=\frac{3}{4-4\cos\varphi}$; г) $r=\frac{6}{2-\cos\varphi}$.

Ответ: а) гипербола; б) эллипс; в) парабола; г) эллипс.

8. Определить тип поверхности при всевозможных λ:

а) $\lambda x^2 + y^2 = z$; б) $\lambda(x^2 + y^2) = z$; в) $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z$.

Ответ: а) при $\lambda > 0$ – эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ – параболический цилиндр, при $\lambda < 0$ – гиперболический параболоид; б) при $\lambda \neq 0$ – эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ – плоскость; в) при $\lambda > 0$ – эллиптический параболоид; при $\lambda = 0$ – плоскость, при $\lambda < 0$ – гиперболический параболоид.

9. Определить вид и параметры поверхности, а также схематически изобразить ее:

а) $3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6x + 16y - 36z + 49 = 0$;

б) $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 8x - 6y - 12z - 1 = 0$;

в) $x^2 - 4y^2 + z^2 - 2x + 12y - 4z - 3 = 0$;

г) $6x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 24x - 6y - 36z - 4z + 25 = 0$;

д) $2x^2 + 3y^2 + 16x - 18y - 12z + 47 = 0$;

е) $2x^2 - 3y^2 - 12x - 6y + 3 = 0$;

ж) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y + 21 = 0$.

Ответ: а) эллипсоид $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y+2)^2}{6} + \frac{(z-3)^2}{4} = 1$; б) однополостный гиперболоид $\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{2} - \frac{(z+1)^2}{1} = 1$; в) двуполостный гиперболоид $(x-1)^2 - 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = -1$; г) конус $\frac{(x+2)^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{2} - \frac{(z+1)^2}{3} = 0$; д) эллиптический параболоид $\frac{(x+4)^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{2} = 2(z+1)$; е) гиперболический цилиндр $\frac{(x-3)^2}{6} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$; ж) эллиптический цилиндр $9(x+1)^2 + 4(y+2)^2 = 4$.

10. Установить, что плоскость $y + 6 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$ по параболе. Найти ее параметр и вершину.

Ответ: $15; \left(0; -6; -\frac{3}{2}\right)$.

11. Установить, при каких значениях m плоскость $x + my - 2 = 0$ пересекает эллиптический параболоид $\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{3} = y$: а) по эллипсу; б) по параболе.

Ответ: а) $m \neq 0$ и $m > -\frac{1}{4}$; б) $m = 0$.

12. Доказать, что через точку $A(4;3;0)$, принадлежащую гиперболиче-

скому параболоиду $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z$, можно провести две прямые, целиком лежащие на параболоиде. Составить канонические уравнения этих прямых.

Ответ: $\frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{0}$; $\frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}$.